Chuyên đề: BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

Các dạng bài tập bất phương trình chứa căn thức

1. *Dạng bất phương trình chứa 1 căn bậc hai.*
2. *Dạng bất phương trình chứa 2 căn bậc hai.*
3. *Dạng bất phương trình chứa 2 căn có bậc khác nhau.*
4. *Dạng bất phương trình chứa nhiều căn.*

1. Bất phương trình chứa một căn bậc hai

Ví dụ 1: Giải bất phương trình: $\left(x^2-3x\right)\sqrt{2x^2-3x-2}\ge 0,\ x\in\mathbb{R}.$

Chúng ta cần sử dụng phép biến đổi tương đương sau:

$$f(x).\sqrt{g(x)}\ge 0,\ \textit{với f(x) và g(x) có nghĩa}\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}g(x)=0\\ \left\{\begin{array}{l}g(x)>0..\\ f(x)\ge 0\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Giải

Bất phương trình tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l}2x^2-3x-2=0\\ \left\{\begin{array}{l}2x^2-3x-2>0\\ x^2-3x\ge 0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\vee x=-\dfrac{1}{2}\\ \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x>2\\ x<-1/2\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 3\\ x\le 0\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 3\\ x=2\\ x\le -1/2\end{array}\right..$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là:

$$\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\{2\}\cup[3;+\infty).$$

Luyện tập 1: Giải bất phương trình:

a. $(x-1)\sqrt{2x-1}\le 3(x-1),\ x\in\mathbb{R}.$

b. $(x^2+1)+(x+1)+3x\sqrt{x+1}>0,\ x\in\mathbb{R}.$

Ví dụ 2: Giải bất phương trình: $x+1\ge\sqrt{2(x^2-1)},\ x\in\mathbb{R}.$

Giải

Bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} 2(x^2-1)\ge 0 \\ x+1\ge 0 \\ 2(x^2-1)\le (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|\ge 1 \\ x\ge -1 \\ x^2-2x-3\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|\ge 1 \\ x\ge -1 \\ -1\le x\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ 1\le x\le 3 \end{array}\right.$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $[1;\,3]\cup\{-1\}$.

Luyện tập 2: Giải các bất phương trình:

a. $\sqrt{x^2-3x-10}<x-2,\ x\in\mathbb{R}$.

b. $\sqrt{x^2-2x-15}\le x-3,\ x\in\mathbb{R}$.

Ví dụ 3: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2+3}\le 3x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Nhẩm nghiệm x_0 *rồi chuyển bất phương trình về dạng tích* $(x-x_0)h(x)$ *bằng phép nhân liên hợp.*

Giải: Nhận xét rằng $x_0 = 1$ là nghiệm của bất phương trình.

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\sqrt{x^2+3}-2\le 3x^2-3 \Leftrightarrow \frac{x^2+3-4}{\sqrt{x^2+3}+2}\le 3\left(x^2-1\right)$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+3}+2}-3\right)\le 0.$$

Sử dụng phương pháp đạt ẩn phụ, *với* $t=\sqrt{x^2+3},\ t\ge\sqrt{3}$.

Giải: Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Với điều kiện $3x^2-1\ge 0$ tức $|x|\ge\frac{1}{\sqrt{3}}$, ta biến đổi phương trình về dạng:

$$x^2+3\le\left(3x^2-1\right)^2 \Leftrightarrow 9x^4-7x^2-2\ge 0 \Leftrightarrow \left(x^2-1\right)\left(9x^2+2\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-1\ge 0 \Leftrightarrow |x|\ge 1.$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{x^2+3}-2 \le 3x^2-3 \Leftrightarrow \frac{x^2+3-4}{\sqrt{x^2+3}+2} \le 3\left(x^2-1\right)$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+3}+2}-3\right) \le 0. \qquad (*)$$

Nhận xét rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+3}+2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+3}+2}-3 < 0$$

nên (*) được biến đổi về dạng:

$$x^2-1 \ge 0 \Leftrightarrow |x| \ge 1.$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Cách 3: Đặt $t = \sqrt{x^2+3},\ t \ge \sqrt{3}.$ Suy ra $x^2 = t^2 - 3$.

Bất phương trình có dạng:

$$t \le 3(t^2-3) - 1 \Leftrightarrow 3t^2 - t - 10 \ge 0 \Leftrightarrow (3t+5)(t-2) \ge 0$$

$$\overset{t \ge \sqrt{3}}{\Rightarrow} t-2 \ge 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+3} \ge 2 \Leftrightarrow x^2+3 \ge 4 \Leftrightarrow x^2 \ge 1 \Leftrightarrow |x| \ge 1.$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Luyện tập 3: Giải bất phương trình:

a. $\sqrt{x^2+8} \le 4x^2-1,\ x \in \mathbb{R}$.

b. $\sqrt{x+1} < 5-x,\ x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 4: Giải bất phương trình: $\sqrt{1-x^3} \le x+5,\ x \in \mathbb{R}$.

Bất phương trình có thể giải theo các cách:

- ***Nhẩm nghiệm x_0*** *rồi chuyển bất phương trình về dạng tích $(x - x_0)h(x)$ bằng phép nhân liên hợp. Cụ thể:*
  - *Nhận xét rằng $x_0 = -2$ thoả mãn VT = VP.*
  - *Biến đổi bất phương trình về dạng:*

$$\sqrt{1-x^3}-3\le x+2 \Leftrightarrow \frac{1-x^3-9}{\sqrt{1-x^3}+3}\le x+2$$

$$\Leftrightarrow x+2+\frac{x^3+8}{\sqrt{1-x^3}+3}\ge 0 \Leftrightarrow (x+2)\left(1+\frac{x^2-x+1}{\sqrt{1-x^3}+3}\right)\ge 0$$

- ***Sử dụng phương pháp hàm số,*** *với điều kiện $x \le 1$ nhận xét:*
  - *VP là hàm đồng biến.*
  - *VT là hàm nghịch biến.*

  Hai đồ thị cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = -2$.

  Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $[-2; 1]$.

Giải

Cách 1: Bất bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}1-x^3\ge 0\\ x+5\ge 0\\ 1-x^3\le (x+5)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^3\le 1\\ x+5\ge 0\\ x^3+x^2+10x+24\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 1\\ x\ge -5\\ (x+2)(x^2-x+12)\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 1\\ x\ge -5\\ x+2\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 1\\ x\ge -5\\ x\ge -2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -2\le x\le 1.$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $[-2; 1]$.

Cách 2: Với điều kiện $1 - x^3 \ge 0$ tức $x \le 1$, ta biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\sqrt{1-x^3}-3\le x+2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x^3-9}{\sqrt{1-x^3}+3} \le x+2$$

$$\Leftrightarrow x+2+\frac{x^3+8}{\sqrt{1-x^3}+3} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)\left(1+\frac{x^2-x+1}{\sqrt{1-x^3}+3}\right) \ge 0$$

$$\Rightarrow x + 2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -2.$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $[-2; 1]$.

Cách 3: Với điều kiện $x \le 1$ nhận xét:

- VP là hàm đồng biến.
- VT là hàm nghịch biến.

Hai đồ thị cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = -2$.

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $[-2; 1]$.

Luyện tập 4: Giải các bất phương trình:

a. $\sqrt{x^3+3} \le 3x-1,\ x \in \mathbb{R}$.

b. $\sqrt{x+2} < 3x-4,\ x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 5: Với $a > 0$, giải bất phương trình: $x+\sqrt{a^2-x^2} \le a,\ x \in \mathbb{R}$.

Bất phương trình có thể được giải theo cách lượng giác hoá với: $x = a.\cos t,\ t \in [0; \pi]$.

Giải

Cách 1: Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\sqrt{a^2-x^2} \le a-x \Leftrightarrow \begin{cases} a-x \ge 0 \\ a^2-x^2 \ge 0 \\ a^2-x^2 \le (a-x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a \le x \le a \\ \left[\begin{array}{l} x \ge a \\ x \le 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ -a \le x \le 0 \end{array}\right.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $-a \le x \le 0$ hoặc $x = a$

Cách 2: Điều kiện $-a \le x \le a$.

Đặt $x = a.\cos t$, với $t \in [0, \pi] \Rightarrow \sqrt{a^2 - x^2} = a.\sin t$.

Khi đó, bất phương trình có dạng:

$$a.\cos t + a.\sin t \le a \Leftrightarrow \cos t + \sin t \le 1 \Leftrightarrow \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} \le t \le \pi \\ t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le \cos t \le 0 \\ \cos t = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -a \le a.\cos t \le 0 \\ a.\cos t = a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -a \le x \le 0 \\ x = a \end{array}\right.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $-a \le x \le 0$ hoặc $x = a$.

Luyện tập 5: Giải bất phương trình:

$$\sqrt{x^2 + a^2} \le x + \frac{2a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}},\ x \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 6: Giải bất phương trình: $\sqrt{2x+1} > 1 - x,\ x \in \mathbb{R}$.

Giải

Cách 1: Bất phương trình tương đương với:

$$(I): \begin{cases} 2x + 1 \ge 0 \\ 1 - x < 0 \end{cases} \text{ hoặc } (II): \begin{cases} 1 - x \ge 0 \\ 2x + 1 > (1 - x)^2 \end{cases}.$$

Ta lần lượt:

- Giải (I) ta được: $\begin{cases} x \ge -\frac{1}{2} \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$

- Giải (II) ta được: $\begin{cases} x \le 1 \\ x^2 - 4x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ 0 < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \le 1.$

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $(0; +\infty)$.

Cách 2: Với điều kiện $2x + 1 \geq 0$ tức $x \geq -\frac{1}{2}$, ta biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\left(\sqrt{2x+1}-1\right)+x>0 \Leftrightarrow \frac{2x+1-1}{\sqrt{2x+1}+1}+x>0 \Leftrightarrow x\left(\frac{2}{\sqrt{2x+1}+1}+1\right)>0 \Leftrightarrow x>0.$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $(0; +\infty)$.

Cách 3: Điều kiện $2x + 1 \geq 0$ tức $x \geq -\frac{1}{2}$.

Đặt $t = \sqrt{2x+1}, (t \geq 0)$. Suy ra $x = \frac{t^2-1}{2}$.

Bất phương trình có dạng:

$$t > 1 - \frac{t^2-1}{2} \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t > 1 \\ t < -3 \quad \text{(loai)} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x+1} > 1 \Leftrightarrow 2x + 1 > 1 \Leftrightarrow x > 0.$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $(0; +\infty)$.

Luyện tập 6: Giải bất phương trình:

$$\sqrt{x+2} > 4 - x, \; x \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 7: Giải bất phương trình: $\sqrt{\left|\frac{1}{4}-x\right|} \geq x + \frac{1}{2}, \; x \in \mathbb{R}.$

Giải

Bất phương trình tương đương với:

$$(I): \; x + \frac{1}{2} \leq 0 \quad \text{hoặc} \quad (II): \begin{cases} x + \frac{1}{2} > 0 \\ \left|\frac{1}{4}-x\right| \geq \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \quad (*) \end{cases}.$$

Giải (I) ta được $x \leq -\frac{1}{2}$. (1)

Giải (II): Ta có biến đổi cho (*):

- Với $\frac{1}{4} - x \geq 0$ tức $x \leq \frac{1}{4}$ thì:

$$\frac{1}{4}-x\ge\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2+2x\le 0 \Leftrightarrow -2\le x\le 0,\text{ thoả mãn.}$$

- Với $\frac{1}{4}-x<0$ tức $x>\frac{1}{4}$ thì:

$$x-\frac{1}{4}\ge\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{2}\le 0\text{, vô nghiệm}$$

Suy ra, nghiệm của (*) là $-2\le x\le 0$.

Và hệ (II) có dạng:

$$\begin{cases} x>-\frac{1}{2} \\ -2\le x\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x\le 0. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; 0]$.

Luyện tập 7: Giải bất phương trình: $\sqrt{|x-1|}\ge x-\frac{1}{4}$, $x\in\mathbb{R}$.

Ví dụ 8: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-3x+6}\ge 3x^2-9x+8,\ x\in\mathbb{R}$.

- ***Sử dụng phương pháp đạt ẩn phụ,*** *với* $t=\sqrt{x^2-3x+6},\ t\ge 0$.
- ***Nhẩm nghiệm x_0*** *rồi chuyển phương trình về dạng tích $(x-x_0)h(x)$ bằng phép nhân liên hợp. Cụ thể:*
  - *Nhận xét rằng $x_0=1$ là nghiệm của phương trình.*
  - *Biến đổi phương trình về dạng:*

$$\sqrt{x^2-3x+6}-2=3x^2-9x+6 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x+6-4}{\sqrt{x^2-3x+6}+2}=3(x^2-3x+2)$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3x+2)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+6}+2}-3\right)=0$$

<u>*Giải*</u>

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng: $\sqrt{x^2-3x+6}=3\left(x^2-3x+6\right)-10$.

Đặt $t=\sqrt{x^2-3x+6},\ (t\ge 0)$ ta được:

$$t\ge 3t^2-10 \Leftrightarrow 3t^2-t-10\le 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{3}\le t\le 2 \Rightarrow t\le 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2-3x+6} \le 2 \Leftrightarrow x^2-3x+2 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le 2.$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là [1; 2].

Cách 2: Ta có biến đổi:

$$\sqrt{x^2-3x+6}-2 \ge 3x^2-9x+6 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x+6-4}{\sqrt{x^2-3x+6}+2} \ge 3(x^2-3x+2)$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3x+2)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+6}+2}-3\right) \ge 0. \qquad (*)$$

Nhận xét rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+6}+2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+6}+2}-3 < 0$$

nên (*) được biến đổi về dạng: $x^2-3x+2 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le 2.$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là [1; 2].

Luyện tập 8: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2+3x+5} > 2x^2+6x-5,\ x \in \mathbb{R}.$

Ví dụ 9: Giải bất phương trình: $\frac{2x}{\sqrt{2x+1}-1} > 2x+2,\ x \in \mathbb{R}.$

Giải Điều kiện:

$$\begin{cases} 2x+1 \ge 0 \\ \sqrt{2x+1}-1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le 2x+1 \ne 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le x \ne 0.$$

(*)

Trục căn thức, ta biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\frac{2x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\left(\sqrt{2x+1}+1\right)} > 2x+2 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1}+1 > 2x+2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} > 2x+1 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} 2x+1 > (2x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+2x < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 0.$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $T = \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Luyện tập 9: Giải bất phương trình: $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3,\ x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 10: Giải bất phương trình: $\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+2,\ x \in \mathbb{R}$.

Giải Điều kiện:

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 1-\sqrt{2x+1} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow\ 0 \leq 2x+1 \neq 1 \ \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \neq 0. \qquad (*)$$

Trục căn thức, ta biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\left[\frac{2x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}\right]^2 < 2x+9 \ \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+1}+1\right)^2 < 2x+9$$

$$\Leftrightarrow 2x+1+1+2\sqrt{2x+1} < 2x+9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} < 2x+1 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} 2x+1 < (2x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+2x > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -\frac{1}{2} \end{array}\right.\cdot$$

Vậy, bất phương trình có tập nghiệm là $(0; +\infty)$.

Luyện tập 10: Giải bất phương trình: $\frac{2x^2}{(3-\sqrt{9+2x})^2} < x+21,\ x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 11: Giải bất phương trình: $x + \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}} > 3\sqrt{5}$.(1)

Giải Điều kiện: $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 2$. (*)

Trường hợp 1: Với $x < 2$ thì bất phương trình vô nghiệm (do vế trái âm).

Trường hợp 2: Với $x > 2$ thì bình phương 2 vế phương trình (1) ta được:

$$x^2 + \frac{4x^2}{x^2-4} + \frac{4x^2}{\sqrt{x^2-4}} > 45 \Leftrightarrow \frac{x^4}{x^2-4} + 4.\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} > 45\ . \qquad (2)$$

Đặt $t = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$, $t > 0$.

Khi đó, bất phương trình (2) có dạng:

$t^2 + 4t - 45 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t > 5 \\ t < -9 \end{array}\right. \Rightarrow t > 5 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} > 5 \Leftrightarrow x^4 - 25x^2 + 100 > 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 > 20 \\ x^2 < 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x| > \sqrt{20} \\ |x| < \sqrt{5} \end{array}\right.$.

Kết hợp với trường hợp đang xét, ta được tập nghiệm của bất phương trình là:

$(-\infty; -\sqrt{20}) \cup (-\sqrt{5}; \sqrt{5}) \cup (\sqrt{20}; +\infty)$.

LUYỆN TẬP 11: Giải bất phương trình: $x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} > \frac{35}{12}$, $x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 12: Giải bất phương trình: $x^2 - 1 \le 2x\sqrt{x^2+2x}$.

Trước tiên, hãy đi đặt điều kiện có nghĩa cho bất phương trình.

Nhận xét rằng với ẩn phụ $t = \sqrt{x^2-2x}, (t \ge 0)$*, ta được:* $x^2 - 2tx - 1 \le 0$.

suy ra, bất phương trình bậc hai ẩn x và tham số t.

<u>*Giải*</u> Đặt $t = \sqrt{x^2+2x}$, điều kiện $t \ge 0$.

Bất phương trình có dạng: $f(x) = x^2 - 2tx - 1 \le 0$. (1)

Coi vế trái là một tam thức bậc 2 theo x, ta có:

$\Delta' = t^2 + 1 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

khi đó $f(x) = 0$ có các nghiệm:

$\left[\begin{array}{l} x = t - x - 1 \\ x = t + x + 1 \end{array}\right.$

tức là (1) được biến đổi về dạng:

$(x - t - x - 1)(x - t + x + 1) \le 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+2x} + 1)(\sqrt{x^2+2x} - 2x - 1) \le 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x} - 2x - 1 \le 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x} \le 2x + 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \ge 0 \\ 0 \le x^2+2x \le (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \ge 0 \\ x^2+2x \ge 0 \\ 3x^2+2x+1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 0 \\ x \le -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 0.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x \ge 0$.

LUYỆN TẬP 12: Giải bất phương trình: $x^2 + 4x \ge (x + 4)\sqrt{x^2 - 2x + 4}$.

2. Bất phương trình chứa hai căn bậc hai

Ví dụ 13: Giải bất phương trình: $\sqrt{x+9} > 5 - \sqrt{2x+4}$, $x \in \mathbb{R}$.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x+9 \ge 0 \\ 2x+4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge -2.$ (*)

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\sqrt{x+9} + \sqrt{2x+4} > 5 \Leftrightarrow x+9+2x+4+2\sqrt{(x+9)(2x+4)} > 25$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+9)(2x+4)} > 12-3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 12-3x < 0 \\ \begin{cases} 12-3x \ge 0 \\ 4(x+9)(2x+4) > (12-3x)^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x > 0.$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $(0; +\infty)$.

LUYỆN TẬP 13: Giải các bất phương trình:

a. $\sqrt{x+1} > 5 - \sqrt{2x+3}$, $x \in \mathbb{R}$.

b. $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+2} > 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 14: Giải bất phương trình: $\sqrt{x-2} + \sqrt{x^2-5} > 3$, $x \in \mathbb{R}$.

Giải

Cách 1: Điều kiện:

$$\begin{cases} x-2\ge 0 \\ x^2-5\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ |x|\le \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow x\ge \sqrt{5}. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\left(\sqrt{x-2}-1\right)+\left(\sqrt{x^2-5}-2\right)>0 \Leftrightarrow \frac{x-2-1}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{x^2-5-4}{\sqrt{x^2-5}+2}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{x^2-9}{\sqrt{x^2-5}+2}>0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{x+3}{\sqrt{x^2-5}+2}\right)>0.$$

$\Leftrightarrow x-3>0. \Leftrightarrow x>3.$

Vậy, bất phương trình có tập nghiệm là $(3;+\infty)$.

Cách 2: Điều kiện:

$$\begin{cases} x-2\ge 0 \\ x^2-5\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ |x|\le \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow x\ge \sqrt{5}. \qquad (*)$$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-5}$ trên $D=\left[\sqrt{5};+\infty\right)$:

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-5}}>0,\ \forall x\in D \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên D.

Nhận xét rằng phương trình có:

- VT là hàm đồng biến.
- VP là hàm hằng.

Hai đồ thị cắt nhau tại điểm có hoành độ x = 3.

Vậy, bất phương trình có tập nghiệm là $(3;+\infty)$.

LUYỆN TẬP 14: Giải bất phương trình:

$$\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}<3,\ x\in\mathbb{R}.$$

Ví dụ 15: Giải bất phương trình: $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}\ge 3\sqrt{x},\ (x\in\mathbb{R}).$

▪ Ẩn phụ dễ nhận thấy nhất là $t=\sqrt{x}\ (t\ge 0)$ và khi đó ta nhận được bất phương trình dạng: $\sqrt{t^4-4t^2+1}\ge -t^2+3t-1.$

Trong trường hợp này cần phải giải một bất phương trình cao hơn 2.

▪ Từ việc đánh giá hệ số và $\sqrt{x}$ hoàn toàn được đưa vào căn bậc hai nên nếu chia cả hai vế của phương trình cho $\sqrt{x}>0$ sẽ thấy xuất hiện $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ và $x+\frac{1}{x}$, từ đó nhận được ẩn phụ $t=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\,(t\ge 2)$. Và khi đó, ta nhận được bất phương trình dạng: $\sqrt{t^2-6}\ge 3-t.$

Giải

Cách 1: Điều kiện:

$$\begin{cases} x^2-4x+1\ge 0 \\ x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 2+\sqrt{3} \\ 0\le x\le 2-\sqrt{3} \end{array}\right. . \qquad (*)$$

Đặt $t=\sqrt{x}\ (t\ge 0)$ bất phương trình được chuyển về dạng:

$$t^2+1+\sqrt{t^4-4t^2+1}\ge 3t \Leftrightarrow \sqrt{t^4-4t^2+1}\ge -t^2+3t-1. \qquad (1)$$

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Bất phương trình (1) đúng khi:

$$-t^2+3t-1\le 0 \Leftrightarrow t^2-3t+1\ge 0 \Leftrightarrow t\le \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ hoặc } t\ge \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Trường hợp 2: Với điều kiện:

$$-t^2+3t-1\ge 0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2}\le t\le \frac{3+\sqrt{5}}{2}. \qquad (**)$$

Bất phương trình (1) được chuyển về dạng:

$$t^4-4t^2+1\ge \left(-t^2+3t-1\right)^2 \Leftrightarrow 6t^3-15t^2+6t\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3t(2t^2-5t+2)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ 2t^2-5t+2\ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\le \frac{1}{2} \\ t\ge 2 \end{array}\right. \overset{(**)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \frac{3-\sqrt{5}}{2}\le t\le \frac{1}{2} \\ t\ge 2 \end{array}\right.$$

Kết hợp hai trường hợp 1 và trường hợp 2, ta được:

$$\left[\begin{array}{l} t\le \frac{1}{2} \\ t\ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}\le \frac{1}{2} \\ \sqrt{x}\ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le \frac{1}{4} \\ x\ge 4 \end{array}\right. \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} 0<x\le \frac{1}{4}. \\ x\ge 4 \end{array}\right.$$

Vậy, bất phương trình có tập nghiệm là $\left[0;\frac{1}{4}\right]\cup[4;+\infty)$.

Cách 2: Điều kiện:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 1 \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 2 + \sqrt{3} \\ 0 \le x \le 2 - \sqrt{3} \end{array} \right. . \qquad (*)$$

Nhận xét rằng x = 0 là nghiệm của bất phương trình.

Với x > 0, biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x - 4 + \frac{1}{x}} \ge 3$$

Đặt $t = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \ (t \ge 2)$ suy ra $x + \frac{1}{x} = t^2 - 2$ nên bất phương trình được chuyển về dạng:

$$t + \sqrt{t^2 - 6} \ge 3 \Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 6} \ge 3 - t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 - t \le 0 \\ \begin{cases} 3 - t > 0 \\ t^2 - 6 \ge (3 - t)^2 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \ge 3 \\ \begin{cases} t < 3 \\ 6t \ge 15 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow t \ge \frac{5}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \ge \frac{5}{2} \overset{u=\sqrt{x}>0}{\Leftrightarrow} u + \frac{1}{u} \ge \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2u^2 - 5u + 2 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u \ge 2 \\ u \le \frac{1}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} \ge 2 \\ \sqrt{x} \le \frac{1}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 4 \\ 0 < x \le \frac{1}{4} \end{array} \right. .$$

Vậy, bất phương trình có tập nghiệm là $\left[0; \frac{1}{4}\right] \cup [4; +\infty)$.

LUYỆN TẬP 15: Giải bất phương trình: $5\sqrt{x} + \frac{5}{2\sqrt{x}} < 2x + \frac{1}{2x}, \ x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 16: Giải bất phương trình: $\sqrt{2x^2 - 6x + 8} - \sqrt{x} \le x - 2, \ x \in \mathbb{R}$.

Giải: Điều kiện $x \ge 0$.

(*)

Biến đổi bất phương trình về dạng: $\sqrt{2(x-2)^2 + 2x} \le x - 2 + \sqrt{x}$. (2)

Đặt:

$$\begin{cases} u = \sqrt{x} \ge 0 \\ v = x - 2 \end{cases}.$$

Khi đó, bất phương trình có dạng:

$$\sqrt{2u^2 + 2v^2} \le u + v \Leftrightarrow \begin{cases} u + v \ge 0 \\ 2u^2 + 2v^2 \le (u+v)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v \ge 0 \\ (u - v)^2 \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u = v \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \ge 0 \\ \sqrt{x} = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là x = 4.

LUYỆN TẬP 16: Giải bất phương trình:

a. $\sqrt{2x^2 + 12x + 6} - \sqrt{2x - 1} > x + 2,\ x \in \mathbb{R}.$

b. $\sqrt{2x^2 - 10x + 16} - \sqrt{x - 1} \le x - 3,\ x \in \mathbb{R}.$

Ví dụ 17: Giải bất phương trình: $\dfrac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{2\left(x^2 - x + 1\right)}} \ge 1.$

Giải

Nhận xét rằng:

$$\sqrt{2\left(x^2 - x + 1\right)} = \sqrt{x^2 + (x-1)^2 + 1} > 1 \Rightarrow MS = 1 - \sqrt{2\left(x^2 - x + 1\right)} < 0.$$

Điều kiện $x \ge 0$.

Bất phương trình được biến đổi về dạng:

$$x - \sqrt{x} \le 1 - \sqrt{2\left(x^2 - x + 1\right)} \Leftrightarrow \sqrt{2\left(x^2 - x + 1\right)} \le 1 - x + \sqrt{x}. \qquad (1)$$

Tới đây, chúng ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Biến đổi tiếp (1) về dạng:

$$\begin{cases} 1 - x + \sqrt{x} \ge 0 \\ x^2 + (x-1)^2 + 1 \le \left(1 - x + \sqrt{x}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x + \sqrt{x} \ge 0 \\ x^2 + (x-1)^2 + 1 \le (1-x)^2 + 2(1-x)\sqrt{x} + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x + \sqrt{x} \ge 0 \\ x^2 + 1 \le 2(1-x)\sqrt{x} + x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x+\sqrt{x} \ge 0 \\ \left(x^2-2x+1\right)-2(1-x)\sqrt{x}+x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x+\sqrt{x} \ge 0 \\ \left(1-x-\sqrt{x}\right)^2 \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x+\sqrt{x} \ge 0 \\ 1-x-\sqrt{x}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} \ge 0 \\ \sqrt{x}=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \ge 0 \\ x=(1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x^2-3x+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Cách 2: Đặt $t=\sqrt{x}\ (t \ge 0)$, khi đó (1) có dạng:

$$\sqrt{2\left(t^4-t^2+1\right)} \le 1-t^2+t \Leftrightarrow \begin{cases} 1-t^2+t \ge 0 \\ 2\left(t^4-t^2+1\right) \le \left(1-t^2+t\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-t^2+t \ge 0 \\ 2\left(t^4-t^2+1\right) \le 1+t^4+t^2-2t^2+2t-2t^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-t^2+t \ge 0 \\ t^4+2t^3-t^2-2t+1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-t^2+t \ge 0 \\ \left(t^2+t-1\right)^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-t^2+t \ge 0 \\ t^2+t-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t \ge 0 \\ t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Cách 3: Nhận xét rằng x = 0 không phải là nghiệm của (1) nên ta có biến đổi:

$$\sqrt{2\left(x-1+\frac{1}{x}\right)} \le \frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}+1. \qquad (2)$$

Đặt $t=\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}$ thì $x+\frac{1}{x}=t^2+2$, khi đó (2) có dạng:

$$\sqrt{2\left(t^2+1\right)} \le t+1 \Leftrightarrow \begin{cases} t+1 \ge 0 \\ 2(t^2+1) \le (t+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge -1 \\ t^2-2t+1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge -1 \\ (t-1)^2 \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ x = (1-x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Cách 4: Sử dụng bất đẳng thức $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$, ta thấy:

$$\sqrt{2\left(x^2 - x + 1\right)} = \sqrt{2\left[(1-x)^2 + \left(\sqrt{x}\right)^2\right]} \geq \sqrt{\left(1 - x + \sqrt{x}\right)^2}$$

$$= \left|1 - x + \sqrt{x}\right| \geq 1 - x + \sqrt{x}. \qquad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra bất phương trình được biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} 1 - x = \sqrt{x} \\ 1 - x + \sqrt{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ (1-x)^2 = x \\ 2\sqrt{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

LUYỆN TẬP 17: Giải bất phương trình:

$$2\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) \leq \frac{5a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}},\ x \in \mathbb{R}..$$

Ví dụ 18: Giải bất phương trình:

$\sqrt{x + \sqrt{2ax - a^2}} + \sqrt{x - \sqrt{2ax - a^2}} \leq \sqrt{2a},\ a > 0,\ x \in \mathbb{R}.$

Giải

Ta có nhận xét:

$$\sqrt{x + \sqrt{2ax - a^2}} = \sqrt{\frac{2ax - a^2 + a^2}{2a} + \sqrt{2ax - a^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2ax - a^2 + 2a\sqrt{2ax - a^2} + a^2}{2a}} = \frac{\left|\sqrt{2ax + a^2} + a\right|}{\sqrt{2a}},$$

$$\sqrt{x-\sqrt{2ax-a^2}}=\frac{\left|\sqrt{2ax+a^2}-a\right|}{\sqrt{2a}}.$$

Khi đó, bất phương trình được biến đổi tương đương thành:

$$\frac{|\sqrt{2ax+a^2}+a|}{\sqrt{2a}}+\frac{|\sqrt{2ax+a^2}-a|}{\sqrt{2a}}\le\sqrt{2a}$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{2ax-a^2}+a|+|\sqrt{2ax-a^2}-a|\le 2a$$

$$\overset{a>0}{\Leftrightarrow} \sqrt{2ax-a^2}+a+|\sqrt{2ax-a^2}-a|\le 2a$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{2ax-a^2}-a|\le a-\sqrt{2ax-a^2}\Leftrightarrow \sqrt{2ax-a^2}-a\le 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2ax-a^2}\le a\Leftrightarrow \begin{cases}2ax-a^2\ge 0\\ 2ax-a^2\le a^2\end{cases}\overset{a>0}{\Leftrightarrow}\frac{a}{2}\le x\le a.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $\frac{a}{2}\le x\le a$.

LUYỆN TẬP 18: Giải bất phương trình:

a. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}>\frac{3}{2}$, $x\in\mathbb{R}$.

b. $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\le 2$, $x\in\mathbb{R}$.

3. Bất phương trình chứa hai căn có bậc khác nhau

Ví dụ 19: Giải bất phương trình: $\sqrt{x}>1+\sqrt[3]{x-1}$, $x\in\mathbb{R}$. (1)

Giải: Điều kiện $x\ge 0$. (*)

Ta có:

$$(1)\xleftrightarrow{x>0\to 1+\sqrt[3]{x-1}>0} x>(1+\sqrt[3]{x-1})^2$$

$$\Leftrightarrow x>1+2\sqrt[3]{x-1}+(\sqrt[3]{x-1})^2\Leftrightarrow x-1-(\sqrt[3]{x-1})^2-2\sqrt[3]{x-1}>0. \quad (2)$$

Đặt $t=\sqrt[3]{x-1}\xrightarrow{x>0} t>-1$.

Khi đó, bất phương trình (2) có dạng:

$$t^3-t^2-2t>0\Leftrightarrow t(t^2-t-2)>0\Leftrightarrow t(t+1)(t-2)>0\xleftrightarrow{t+1>0} t(t-2)>0$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}t>2\\ t<0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\sqrt[3]{x-1}>2\\ \sqrt[3]{x-1}<0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x-1>8\\ x-1<0\end{bmatrix}\xleftrightarrow{x>0}\begin{bmatrix}x>9\\ 0<x<1\end{bmatrix}$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x > 9$ hoặc $0 < x < 1$.

LUYỆN TẬP 19: Giải bất phương trình:

$$2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8<0,\quad x\in\mathbb{R}.$$

4. Bất phương trình chứa nhiều căn bậc hai

Ví dụ 20 Giải bất phương trình: $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x-1}>\sqrt{2x-4}$, $x\in\mathbb{R}$.

Đây là bất phương trình vô tỉ và có thể nhận thấy ngay rằng sau phép chuyển vế được bất phương trình dạng $\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)}+\sqrt{h(x)}$, do đó các bước thực hiện bao gồm:

Bước 1: Thiết lập điều kiện có nghĩa cho bất phương trình. (*)

Bước 2: Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$f(x) > g(x) + h(x) + 2\sqrt{g(x).h(x)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{g(x).h(x)} < p(x) \Leftrightarrow \begin{cases} p(x) > 0 \\ g(x).h(x) < p^2(x) \end{cases} \Rightarrow \text{nghiệm}.$$

Bước 3: Kết hợp với (*), nhận được nghiệm của bất phương trình.

Giải: Điều kiện:

$$\begin{cases} 5x-1\ge 0 \\ x-1\ge 0 \\ 2x-4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 2. \qquad (*)$$

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\sqrt{5x-1} > \sqrt{2x-4}+\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow 5x-1>2x-4+x-1+2\sqrt{(2x-4)(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x-4)(x-1)} < x+2 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} (2x-4)(x-1)<(x+2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-10x<0 \Leftrightarrow 0<x<10.$$

Kết hợp với (*), ta được nghiệm của bất phương trình là $2 \le x < 10$.

LUYỆN TẬP 20: Giải bất phương trình:

$$\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}<181\square\square\square 14x.$$

Ví dụ 21: Giải bất phương trình:

$$\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3}\geq 2\sqrt{x^2-5x+4},\ x\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Dễ thấy không thể sử dụng phép khai phương để giải bất phương trình này. Nhận thấy nhân tử chung $\sqrt{|x-1|}$, nên ta sẽ thực hiện theo các bước:

Bước 1. Đặt điều kiện có nghĩa cho bất phương trình.

Bước 2. Sử dụng phương pháp chia khoảng.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-3x+2\geq 0 \\ x^2-4x+3\geq 0 \\ x^2-5x+4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 4 \\ x\leq 1 \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: Với $x \geq 4$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-1)(x-3)}\geq 2\sqrt{(x-1)(x-4)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}\geq 2\sqrt{x-4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}-\sqrt{x-4}\geq \sqrt{x-4}-\sqrt{x-3}$$

luôn đúng vì với $x \geq 4$ ta được VT > 0 và VP < 0.

Vậy $x \geq 4$ là nghiệm bất phương trình.

Trường hợp 2: Với $x \leq 1$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(2-x)}+\sqrt{(1-x)(3-x)}\geq 2\sqrt{(1-x)(4-x)}$$

Với x = 1, bất phương trình nghiệm đúng.

Với x < 1, bất phương trình có dạng:

$$\Leftrightarrow \sqrt{2-x}+\sqrt{3-x}\geq 2\sqrt{4-x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2-x}-\sqrt{4-x}\geq \sqrt{4-x}-\sqrt{3-x}$$

Nhận xét rằng với x < 1 thì VT < 0 và VP > 0, phương trình vô nghiệm.

Vậy, bất phương trình có nghiệm x = 1 hoặc $x \geq 4$.

LUYỆN TẬP 21: Giải bất phương trình:

$$2\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+1}<4,\ x\in\mathbb{R}.$$