

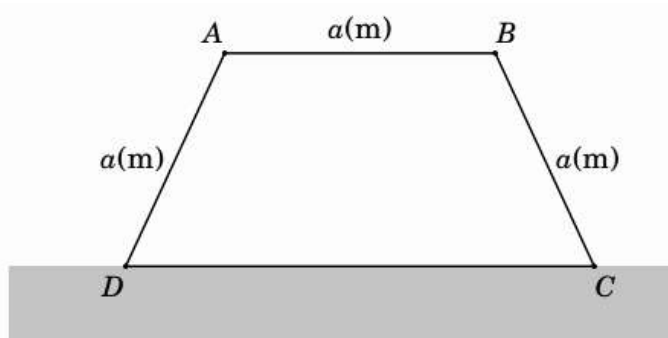
**Một số bài toán tối ưu đơn giản**

Quy trình giải một bài toán tối ưu hoá:

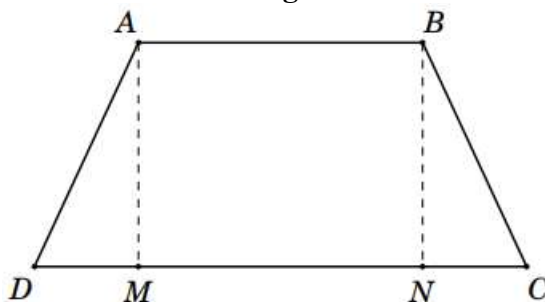
- **Bước 1:** Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.
- **Bước 2:** Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x , và biểu diễn các đại lượng khác ở Bước 1 theo x . Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x . Tìm tập xác định của hàm số $Q = Q(x)$
- **Bước 3:** Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q = Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Một bác nông dân có ba tấm lưới B40, mỗi tấm dài a (m) và muốn rào một mảnh vườn dọc theo bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ dưới đây biết rằng bờ sông là đường thẳng CD không phải rào lưới. Hỏi bác nông dân đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?



Lời giải



Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên CD

Đặt $x = MD$, ($0 < x < a$) suy ra $AM = \sqrt{AD^2 - MD^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$

Diện tích của mảnh vườn hình thang cân là $S(x) = \frac{(AB + CD)AM}{2} = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2}$.

Xét hàm số $f(x) = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2}$ trên khoảng $(0 < x < a)$

Đạo hàm $f'(x) = \frac{-2x^2 - ax + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \notin (0 < x < a) \\ x = \frac{a}{2} \in (0 < x < a) \end{cases}$

Bảng biến thiên hàm số $f(x)$ trên khoảng $(0; a)$

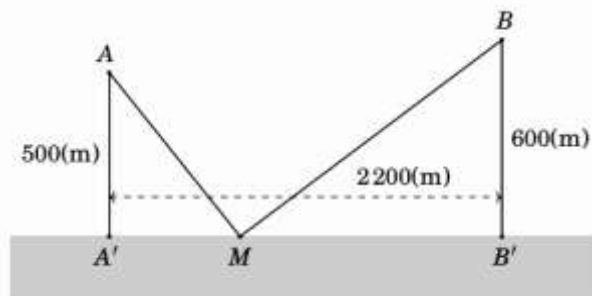


x	0	$\frac{a}{2}$	a
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	a^2	$\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$	0

Từ bảng biến thiên suy ra $\max_{(0;a)} f(x) = f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$

Vậy bác nông dân có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4} \text{ m}^2$.

Bài tập 2: Có hai xã A, B cùng ở một bên bờ sông. Khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 550 \text{ m}$, $BB' = 600 \text{ m}$. Người ta đo được $A'B' = 2200 \text{ m}$ như hình vẽ dưới đây. Các kỹ sư muốn xây dựng một trạm cung cấp nước sạch nằm cạnh bên bờ sông cho người dân của hai xã sử dụng. Để tiết kiệm chi phí, các kỹ sư phải chọn một vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn $A'B'$ sao cho tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó.



Lời giải

Đặt $A'M = x$ ($0 < x < 2200$), $B'M = 2200 - x$

Ta có $AM = \sqrt{x^2 + 500^2}$, $BM = \sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}$

Khi đó tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là:

$$AM + BM = \sqrt{x^2 + 500^2} + \sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 500^2} + \sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}$ trên khoảng $(0; 2200)$

$$\text{Đạo hàm } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 500^2}} - \frac{2200 - x}{\sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 1000$$

Bảng biến thiên:

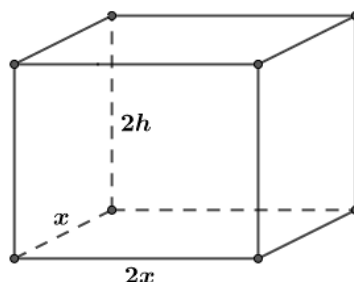
x	0	1000	2200		
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	2780		2460		2856

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông là khoảng 2460 m, tại vị trí M cách điểm A' là 1000 m.



Bài tập 3: Ông A dự định sử dụng hết $5,5m^2$ kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Lời giải



Gọi $x \text{ m}$ là chiều rộng. ($x > 0$). Chiều dài là $2x \text{ m}$. Chiều cao là $h \text{ m}$. $h > 0$

Theo đề bài, ta có: $2x^2 + 4xh + 2xh = 5,5 \Leftrightarrow 2x^2 + 6xh = 5,5 \Leftrightarrow h = \frac{5,5 - 2x^2}{6x}$

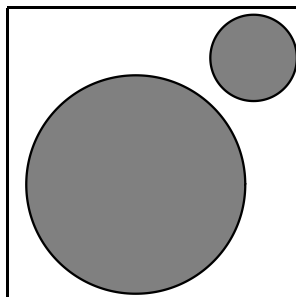
Vì $h > 0$ và $x > 0$ nên $5,5 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\sqrt{11}}{2}$.

Suy ra thể tích của bể cá là: $V = 2x^2h = \frac{5,5}{3}x - \frac{2}{3}x^3$ với $0 < x < \frac{\sqrt{11}}{2}$.

$$V' = \frac{11}{6} - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{33}}{6} (N) \\ x = -\frac{\sqrt{33}}{6} (L) \end{cases}$$

Thể tích lớn nhất của bể cá là: $V_{\max} = V\left(\frac{\sqrt{33}}{6}\right) \approx 1,17 \text{ m}^3$.

Bài tập 4: Từ một mảnh giấy hình vuông cho trước cắt thành hai hình tròn sao cho tổng diện tích của hai hình tròn là lớn nhất. Gọi k ($k \leq 1$) là tỉ số bán kính của chúng khi đó. Hỏi giá trị $\sqrt{k}$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Gọi đường chéo hình chữ nhật là a . Ta có: $R + r = \frac{a}{1 + \sqrt{2}}$.

Tìm max của $R^2 + r^2$. Khảo sát hàm, ta tìm được $R = \frac{a}{2\sqrt{2}}$. Từ đó ta tìm được $\sqrt{k} = \sqrt{2} - 1$.



Bài tập 5: Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất được uốn thành một hình vuông, đoạn thứ hai được uốn thành một vòng tròn. Hỏi khi tổng diện tích của hình vuông và hình tròn ở trên nhỏ nhất thì chiều dài đoạn dây uốn thành hình vuông bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Gọi x ($0 < x < 60$) là chiều dài của đoạn thứ hai, suy ra $60 - x$ là độ dài đoạn thứ nhất.

Khi đó cạnh hình vuông là $15 - \frac{x}{4}$ nên diện tích hình vuông là $\left(15 - \frac{x}{4}\right)^2$.

Chu vi của vòng tròn là $2\pi R = x \Rightarrow R = \frac{x}{2\pi}$. Khi đó diện tích hình tròn là $\pi R^2 = \frac{x^2}{4\pi}$.

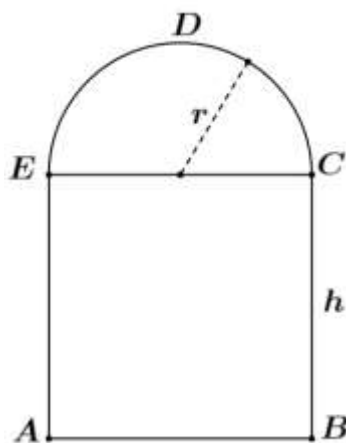
Khi đó tổng diện tích của hai hình sẽ là $f(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \left(15 - \frac{x}{4}\right)^2$.

Khi đó ta có $f'(x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2}\left(15 - \frac{x}{4}\right) = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}\right) - \frac{15}{2}$.

Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{15}{\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}}$. Suy ra tổng diện tích hai hình nhỏ nhất khi $x = \frac{60\pi}{4 + \pi}$.

Khi đó cạnh hình vuông sẽ là $60 - \frac{60\pi}{4 + \pi} \approx 33,61$.

Bài tập 6: Bác thợ hàn dùng một thanh kim loại dài 4 m để uốn thành khung cửa sổ có dạng như hình vẽ. Gọi r là bán kính của nửa đường tròn. Tìm r để diện tích tạo thành đạt giá trị lớn nhất.



Lời giải

Ta có $2(h + r) + \pi r = 4 \Rightarrow h = \frac{4 - 2r - \pi r}{2}$.

Diện tích của khung cửa là $S = \frac{1}{2}\pi r^2 + 2rh = \frac{1}{2}\pi r^2 + 2r\left(\frac{4 - 2r - \pi r}{2}\right) = -\frac{\pi + 4}{2}r^2 + 4r$.

Ta có $h = \frac{4 - 2r - \pi r}{2} > 0 \Leftrightarrow 0 < r < \frac{4}{\pi + 2}$.



Xét hàm số $S(r) = -\frac{\pi+4}{2}r^2 + 4r$ trên $\left(0; \frac{4}{\pi+2}\right)$ có $S'(r) = -(\pi+4)r + 4 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{4}{\pi+4}$

Bảng biến thiên

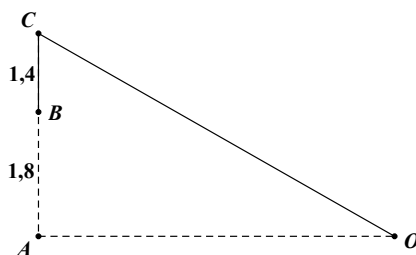
x	0	$\frac{4}{\pi+4}$	$\frac{4}{\pi+2}$
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$			

Vậy $S(r)$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow r = \frac{4}{\pi+4}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4 mét và đặt ở độ cao 1,8 mét so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đó? Biết rằng góc BOC là góc nhọn.



A. $AO = 2,4$ m

B. $AO = 2$ m

C. $AO = 2,6$ m

D. $AO = 3$ m

Lời giải

Đặt độ dài cạnh $AO = x$ cm, ($x > 0$)

Suy ra: $BO = \sqrt{3,24 + x^2}$, $CO = \sqrt{10,24 + x^2}$

Ta sử dụng định lý cosin trong tam giác OBC ta có:

$$\cos BOC = \frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2 \cdot OB \cdot OC} = \frac{(3,24 + x^2) + (10,24 + x^2) - 1,96}{2\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}} = \frac{5,76 + x^2}{\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}}$$

Vì góc BOC là góc nhọn nên bài toán trở thành tìm x để $F(x) = \frac{5,76 + x^2}{\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}}$ đạt

giá trị nhỏ nhất.

$$\text{Đặt } (3,24 + x^2) = t, (t > 3,24) \text{ suy ra } F(t) = \frac{t + \frac{63}{25}}{\sqrt{t(t+7)}} = \frac{25t + 63}{25\sqrt{t(t+7)}}$$

Ta tìm t để $F(t)$ nhận giá trị nhỏ nhất.



$$F'(t) = \left(\frac{25t+63}{25\sqrt{t(t+7)}} \right)' = \frac{1}{25} \left(\frac{25\sqrt{t(t+7)} - (25t+63) \left(\frac{2t+7}{2\sqrt{t(t+7)}} \right)}{t(t+7)} \right)$$

$$= \frac{1}{25} \left(\frac{50(t^2+7t) - (25t+63)(2t+7)}{2t(t+7)\sqrt{t(t+7)}} \right) = \frac{1}{25} \left(\frac{49t-441}{2t(t+7)\sqrt{t(t+7)}} \right) = 0 \Leftrightarrow t=9$$

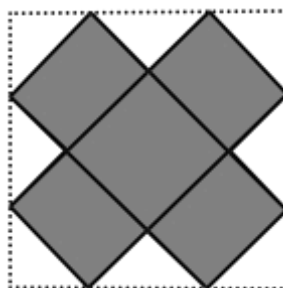
Bảng biến thiên:

t	3,24	9	$+\infty$
$F'(t)$	-	0	+
$F(t)$			

Thay vào đặt ta có: $(3,24+x^2)=9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{144}{25} \Leftrightarrow x=2,4m$

Vậy để nhìn rõ nhất thì $AO = 2,4m$.

Câu 2: Từ hình vuông có cạnh bằng 6 người ta cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ. Sau đó người ta gập thành hình hộp chữ nhật không nắp. Tính thể tích lớn nhất của khối hộp.



A. $8\sqrt{2}$.

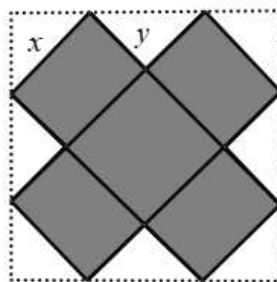
B. $10\sqrt{2}$.

C. $9\sqrt{2}$.

D. $11\sqrt{2}$.

Lời giải

Đặt kích thước các cạnh như hình vẽ



Ta có $\frac{x}{\sqrt{2}} + y\sqrt{2} + \frac{x}{\sqrt{2}} = 6 \Leftrightarrow x+y=3\sqrt{2} \Leftrightarrow y=3\sqrt{2}-x$ với $0 < x < 3\sqrt{2}$.

Thể tích của khối hộp tạo thành là $V = x^2y = x^2(3\sqrt{2}-x)$.



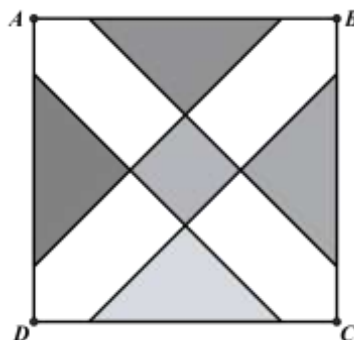
Ta có $V' = 3x(2\sqrt{2} - x) = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên

x	0	$2\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$
$V'(x)$	+	0	-
$V(x)$			

Vậy: $\max V = 8\sqrt{2}$ khi $x = 2\sqrt{2}, y = \sqrt{2}$.

Câu 3: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4, chính giữa có một hình vuông đồng tâm với $ABCD$. Biết rằng bốn tam giác là bốn tam giác cân. Hỏi tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ nhất bằng bao nhiêu?



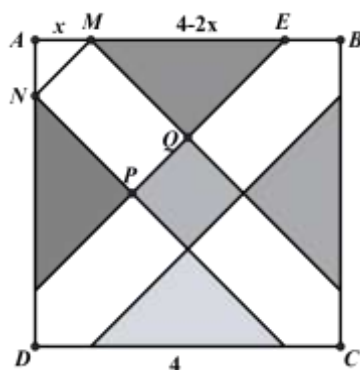
A. $\frac{19}{3}$.

B. $\frac{17}{3}$.

C. $\frac{16}{3}$.

D. $\frac{14}{3}$.

Lời giải



Đặt $AM = x$ ($0 < x < 4$) $\Rightarrow ME = 4 - 2x$.

$$2MQ^2 = (4 - 2x)^2 \Leftrightarrow MQ^2 = 2(2 - x)^2 \Leftrightarrow MQ = \sqrt{2}(2 - x)$$

Gọi S tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ.

$$S = 4 \cdot \frac{MQ^2}{2} + PQ^2 = 2MQ^2 + MN^2 = (4 - 2x)^2 + (x\sqrt{2})^2 = 6x^2 - 16x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$



Bảng biến thiên

x	0	$\frac{4}{3}$	4
$S'(x)$	—	0	+
$S(x)$			

Vậy $S_{\min} = \frac{16}{3}$

Câu 4: Trong một bài thực hành huấn luyện quân sự có một tình huống chiến sỹ phải bơi qua sông để tấn công mục tiêu ở ngay phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 100m và vận tốc bơi của chiến sỹ bằng một phần ba vận tốc chạy trên bộ. Hãy cho biết chiến sỹ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất? Biết dòng sông là thẳng, mục tiêu cách chiến sỹ 1km theo đường chim bay và chiến sỹ cách bờ bên kia 100m.

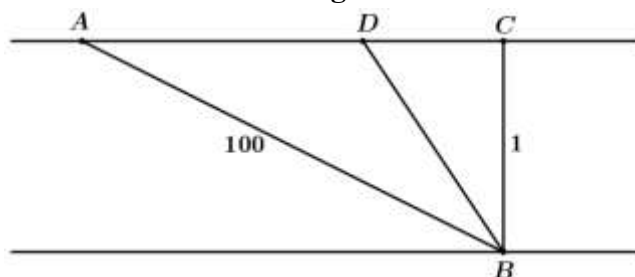
A. $\frac{200\sqrt{2}}{3}$.

B. $75\sqrt{3}$.

C. $\frac{200\sqrt{3}}{3}$.

D. $75\sqrt{2}$.

Lời giải



Gọi A là mục tiêu; B là vị trí chiến sỹ và BD là đường bơi của chiến sỹ.

Chọn một đơn vị độ dài là 100m suy ra $BC = 1$; $AB = 10$; $AC = 3\sqrt{11}$

Gọi vận tốc bơi của chiến sỹ là một đơn vị vận tốc thì vận tốc chạy của chiến sỹ là 3 đơn vị vận tốc. Gọi x là quãng đường chiến sỹ bơi suy ra $BD = x$

Vậy quãng đường chiến sỹ chạy là $AD = AC - CD = 3\sqrt{11} - \sqrt{x^2 - 1}$

Thời gian chiến sỹ đến được mục tiêu là: $t = \frac{3\sqrt{11} - \sqrt{x^2 - 1}}{3} + \frac{x}{1} = \sqrt{11} - \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 1} + x$

Xét hàm $f(x) = \sqrt{11} - \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 1} + x$ có $f'(x) = 1 - \frac{1}{3} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ (thỏa mãn)} \\ x = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ (loại)} \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	1	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$	10
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$			



Vậy thời gian chiến sỹ đến mục tiêu ngắn nhất khi $f(x)_{\min} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

Vậy chiến sỹ phải bơi $\frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot 100 = 75\sqrt{2} (m)$.

Câu 5: Một người dự định làm một bể chứa nước hình trụ bằng inóc có nắp đậy với thể tích 1 (m³). Chi phí mỗi m² đáy là 600 nghìn đồng, mỗi m² nắp là 200 nghìn đồng và mỗi m² mặt bên là 400 nghìn đồng. Hỏi người đó án kính bể là bao nhiêu để chi phí làm bể ít nhất?

A. $\sqrt[3]{2\pi}$.

B. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

C. $\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$.

D. $\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$.

Lời giải

Gọi R và h lần lượt là bán kính và chiều cao của bể chứa nước.

Ta có thể tích bể chứa nước là: $V = 1 \Rightarrow \pi R^2 h = 1 \Leftrightarrow h = \frac{1}{\pi R^2}$.

Diện tích nắp và mặt đáy bể chứa nước là: $S_1 = \pi R^2$.

Diện tích xung quanh của bể chứa nước là: $S_2 = 2\pi R h = 2\pi R \cdot \frac{1}{\pi R^2} = \frac{2}{R}$.

Chi phí làm bể chứa nước là: $f(R) = 6\pi R^2 + 2\pi R^2 + 4 \cdot \frac{2}{R} = 8\pi R^2 + \frac{8}{R}$ (trăm nghìn đồng).

Ta có: $f'(R) = 16\pi R - \frac{8}{R^2}$. Xét $f'(R) = 0 \Leftrightarrow 16\pi R - \frac{8}{R^2} = 0 \Leftrightarrow 2\pi R^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$.

Bảng biến thiên:

R	0	$\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$	$+\infty$
$f'(R)$		0	
$f(R)$			

CT

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy chi phí làm bể chứa nước thấp nhất khi $R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$.

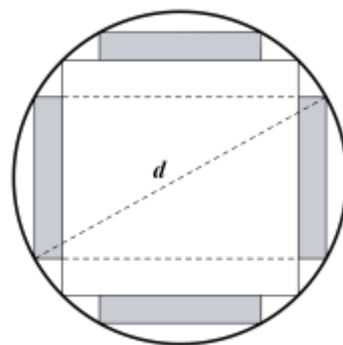
Câu 6: Một khúc gỗ tròn hình trụ cần xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và 4 miếng phụ như hình vẽ. Hãy xác định kích thước của các miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất. Biết đường kính khúc gỗ là d .

A. Rộng $\frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{16}d$, dài $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{17}}{4}d$

B. Rộng $\frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{15}d$, dài $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{17}}{4}d$

C. Rộng $\frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{14}d$, dài $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{17}}{4}d$

D. Rộng $\frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{13}d$, dài $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{17}}{4}d$





Lời giải

Gọi chiều dài và chiều rộng của miếng phụ lần lượt là x, y . Đường kính của khúc gỗ là d , khi đó

tiết diện ngang của thanh xà có độ dài cạnh là $\frac{d}{\sqrt{2}}$ và $0 < x < \frac{d(2-\sqrt{2})}{4}, 0 < y < \frac{d}{\sqrt{2}}$

Theo đề Câu ta được hình chữ nhật ABCD như hình vẽ, theo định lý Pitago ta có:

$$\left(2x + \frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = d^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2 - 8x^2 - 4\sqrt{2}dx}$$

Do đó, miếng phụ có diện tích là: $S(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2 - 8x^2 - 4\sqrt{2}dx}$ với $0 < x < \frac{d(2-\sqrt{2})}{4}$

Bài toán trở thành tìm x để $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

$$\text{Ta có: } S'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2 - 8x^2 - 4\sqrt{2}dx} + \frac{x(-8x - 2\sqrt{2}d)}{\sqrt{2}\sqrt{d^2 - 8x^2 - 4\sqrt{2}dx}} = \frac{-16x^2 - 6\sqrt{2}dx + d^2}{\sqrt{2}\sqrt{d^2 - 8x^2 - 4\sqrt{2}dx}}$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow -16x^2 - 6\sqrt{2}dx + d^2 = 0 \Leftrightarrow -16\left(\frac{x}{d}\right)^2 - 6\sqrt{2}\left(\frac{x}{d}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{16}d$$

$$\text{Vậy miếng phụ có kích thước } x = \frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{16}d, y = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{17}}{4}d$$

Câu 7: Nhà Long muốn xây một hồ chứa nước có dạng một khối hộp chữ nhật có nắp đậy có thể tích bằng $576m^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá tiền thuê nhân công để xây hồ tính theo m^2 là 500.000 đồng/ m^2 . Hãy xác định kích thước của hồ chứa nước sao cho chi phí thuê nhân công là ít nhất và chi phí đó là bao nhiêu?

A. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 216 triệu

B. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 215 triệu

C. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 214 triệu

D. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 213 triệu.

Lời giải

Gọi x, y, h lần lượt là chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hồ chứa nước, ($x > 0, y > 0, h > 0, m$)

$$\text{Ta có: } \frac{y}{x} = 2 \Leftrightarrow y = 2x. \text{ Thể tích hồ chứa nước } V = xyh \Leftrightarrow h = \frac{V}{xy} = \frac{576}{x(2x)} = \frac{288}{x^2}$$

Diện tích cần xây dựng hồ chứa nước:

$$S(x) = 2xy + 2xh + 2yh = 2x(2x) + 2x\frac{288}{x^2} + 2(2x)\frac{288}{x^2} = 4x^2 + \frac{1728}{x}$$

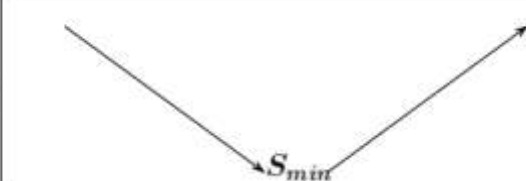
Để chi phí nhân công là ít nhất thì diện tích cần xây dựng là nhỏ nhất, mà vẫn đạt thể tích như mong muốn.

Bài toán trở thành tìm x để $S(x)$ nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow S(x) = 4x^2 + \frac{1728}{x} \Rightarrow S'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x - \frac{1728}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

Bảng biến thiên:



x	0	6	$+\infty$
$S'(x)$	-	0	+
$S(x)$			

Vậy kích thước của hồ là: rộng 6m, dài 12m, cao 8m.

Diện tích cần xây: $432m^2$ và chi phí ít nhất là: $432 \times 500.000 = 216.000.000$

Câu 8: Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính R , nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp?

A. $2R^2$

B. $5R^2$

C. R^2

D. $3R^2$

Lời giải

Gọi x là độ dài cạnh của hình chữ nhật không nằm dọc theo đường kính của hình tròn ($0 < x < R$)

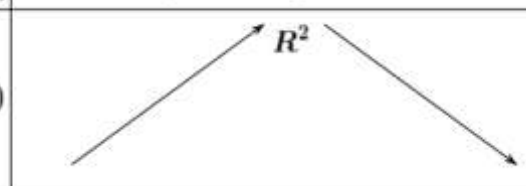
Độ dài cạnh còn lại của hình chữ nhật là $2\sqrt{R^2 - x^2}$

Ta có diện tích của hình chữ nhật là: $S(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$

Bài toán trở thành tìm x để $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

$$S'(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{2R^2 - 4x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow 2R^2 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{R\sqrt{2}}{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ x = \frac{-R\sqrt{2}}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	R
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$			

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là R^2 .

Câu 9: Để thiết kế một chiếc bể cá hình chữ nhật có chiều cao là $60cm$, thể tích là $96.000cm^3$, người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70.000 đồng/ m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/ m^2 . Chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là:

A. $83.200.000$ đồng

B. 382.000 đồng

C. 83.200 đồng

D. $8.320.000$ đồng.

Lời giải

$$\text{Diện tích của đáy hộp là: } S = \frac{V}{h} = \frac{96.000}{60} = 1600cm^2 = 0,16m^2$$

Gọi chiều dài cạnh đáy của hộp là x , ($x > 0, m$), chiều rộng của hộp là $\frac{0,16}{x}$

Gọi $F(x)$ là hàm chi phí để làm bể cá.



Chi phí để hoàn thành bể cá:

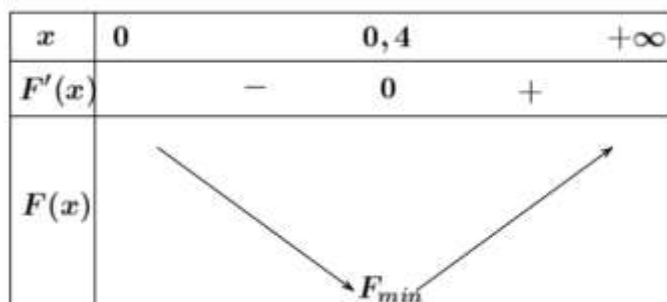
$$F(x) = 0,16 \times 100.000 + 2.0,6x.70.000 + 2.0,6 \cdot \frac{0,16}{x} \cdot 70.000 = 16.000 + 48.000x + \frac{13440}{x}$$

Bài toán trở thành tìm x để $F(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$F'(x) = 84.000 - \frac{13440}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 84.000 - \frac{13440}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0,4$$

Bảng biến thiên:

x	0	0,4	$+\infty$
$F'(x)$		–	0
$F(x)$			+



Vậy chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là: 83.200 đồng

Câu 10: Ông Nam cần xây dựng một bể nước mưa có thể tích $V = 8(m^3)$ dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài gấp $\frac{4}{3}$ lần chiều rộng, đáy và nắp đổ bê tông, cốt thép; xung quanh xây bằng gạch và xi măng. Biết rằng chi phí trung bình là $980.000đ/m^2$ và ở nắp để hở một khoảng hình vuông có diện tích bằng $\frac{2}{9}$ diện tích nắp bể. Tính chi phí thấp nhất mà ông Nam phải chi trả (làm tròn đến hàng nghìn đồng).

A. 22.770.000 đ. **B.** 27.657.000 đ. **C.** 20.965.000 đ. **D.** 23.235.000 đ.

Lời giải

Gọi chiều rộng của bể là $3x$ (m). Ta có chiều dài bể là $4x$ (m) và chiều cao của bể là $\frac{2}{3x^2}$ (m)

Khi đó tổng diện tích bề mặt xây là:

$$T = (3x + 4x) \cdot 2 \cdot \frac{2}{3x^2} + 2 \cdot 3x \cdot 4x - \frac{2}{9} \cdot 3x \cdot 4x = \frac{28}{3x^2} + \frac{64x^2}{3} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{28}{3x^2} \cdot \frac{64x^2}{3}} = \frac{32\sqrt{7}}{3} (m^2).$$

Chi phí C (tính theo đồng) xây dựng là: $C = T \cdot 980000 \geq \frac{32\sqrt{7}}{3} \cdot 980000 \approx 27657000$ (đồng).

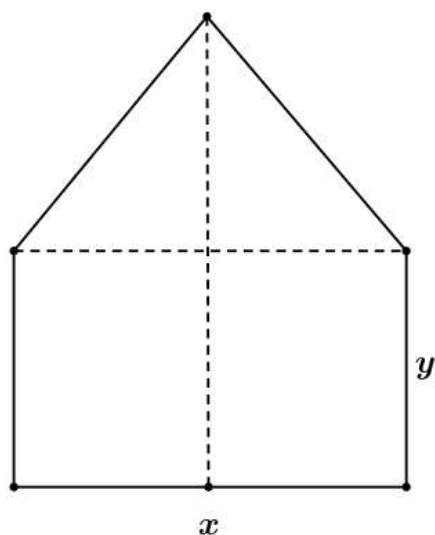
Câu 11: Dùng một dây thép dài 60 m uốn thành một khung có dạng như hình vẽ. Biết phần dưới là hình chữ nhật và phía trên là một tam giác đều. Diện tích lớn nhất của khung có giá trị bằng:

A. $\frac{900}{6-\sqrt{3}}(m^2)$. **B.** $\frac{1200}{6-\sqrt{3}}(m^2)$. **C.** $\frac{700}{3+\sqrt{3}}(m^2)$. **D.** $\frac{600}{3-\sqrt{3}}(m^2)$.

Lời giải

Gọi hai cạnh của hình chữ nhật là x và y như hình vẽ

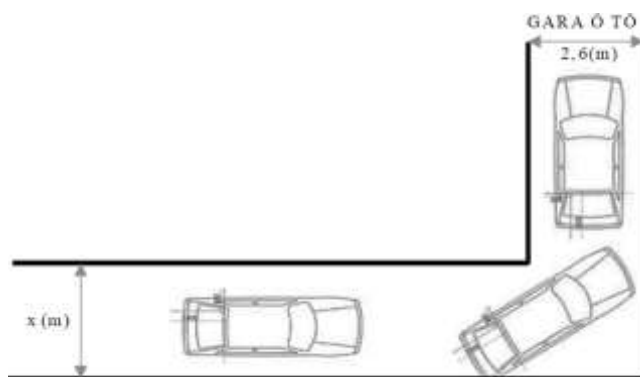
Khi đó chu vi của khung là $(x + 2y) + 2x = 60 \Leftrightarrow y = 30 - \frac{3}{2}x$



Suy ra diện tích của khung là: $S = xy + \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = x(30 - 1,5x) + \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6-\sqrt{3}}{4}x^2 + 30x = f(x)$

Dễ dàng suy ra được: $S_{\max} = \max f(x) = f\left(\frac{60}{6-\sqrt{3}}\right) = \frac{900}{6-\sqrt{3}} (\text{m}^2)$

Câu 12: Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA Ô TÔ nhà cô Hiền. Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng x (m), đoạn đường thẳng vào cổng GARA có chiều rộng 2,6 (m). Biết kích thước xe ô tô là $5\text{m} \times 1,9\text{m}$. Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài 5 (m), chiều rộng 1,9 (m). Hỏi chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị bên dưới để ô tô có thể đi vào GARA được?

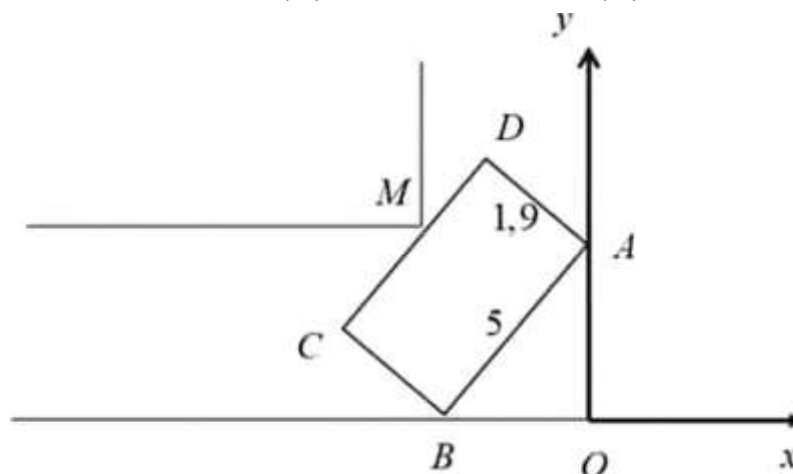


A. $x = 3,7$ (m).

B. $x = 2,6$ (m).

C. $x = 3,55$ (m).

D. $x = 4,27$ (m).





Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ. Khi đó $M(-2,6;x)$.

Gọi $B(-a;0)$ suy ra $A(0;\sqrt{25-a^2})$. Phương trình $AB: \frac{x}{-a} + \frac{y}{\sqrt{25-a^2}} - 1 = 0$.

Do $CD \parallel AB$ nên phương trình $CD: \frac{x}{-a} + \frac{y}{\sqrt{25-a^2}} - T = 0$.

Mà khoảng cách giữa AB và CD bằng 1,9 m nên

$$\frac{|T-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{25-a^2}}\right)^2}} = 1,9 \Rightarrow T = 1 + \frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}}.$$

Điều kiện để ô tô đi qua được là M, O nằm khác phía đối với bờ là đường thẳng CD .

Suy ra: $\frac{-2,6}{-a} + \frac{x}{\sqrt{25-a^2}} - 1 - \frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{25-a^2} + \frac{9,5}{a} - \frac{2,6 \times \sqrt{25-a^2}}{a}$

Để cho nhanh, chúng ta dùng chức năng **TABLE** trong máy tính:

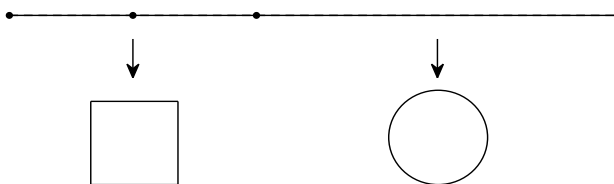
$$f(X) = \sqrt{25-X^2} + \frac{9,5}{X} - \frac{2,6 \times \sqrt{25-X^2}}{X} \text{ với STEP} = \frac{5}{29}; \text{ START} = 0; \text{ END} = 5.$$

Thấy giá trị lớn nhất của $f(X) = \sqrt{25-X^2} + \frac{9,5}{X} - \frac{2,6 \times \sqrt{25-X^2}}{X}$ xấp xỉ 3,698.

Vậy chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị $x = 3,7$ (m)

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Một sợi dây kim loại dài a (cm). Người ta cắt đoạn dây đó thành hai đoạn có độ dài x (cm) được uốn thành đường tròn và đoạn còn lại được uốn thành hình vuông ($a > x > 0$).



a) Bán kính đường tròn: $r = \frac{x}{\pi}$.

b) Diện tích hình vuông: $\left(\frac{a-x}{4}\right)^2$.

c) Tổng diện tích hai hình: $\frac{(4+\pi) \cdot x^2 - 2a\pi x + \pi a^2}{16\pi}$.

d) Khi $x = \frac{a\pi}{2+\pi}$ thì hình vuông và hình tròn tương ứng có tổng diện tích nhỏ nhất.



Lời giải

a) Sai : Do x là độ dài của đoạn dây cuộn thành hình tròn ($0 < x < a$).

Suy ra chiều dài đoạn còn lại là $a - x$.

Chu vi đường tròn: $2\pi r = x \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$. Diện tích hình tròn: $S_1 = \pi r^2 = \frac{x^2}{4\pi}$.

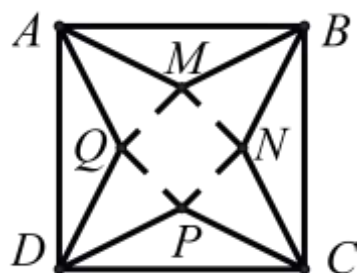
b) Đúng: Diện tích hình vuông: $S_2 = \left(\frac{a-x}{4}\right)^2$.

c) Đúng: Tổng diện tích hai hình: $S = \frac{x^2}{4\pi} + \left(\frac{a-x}{4}\right)^2 = \frac{(4+\pi)x^2 - 2a\pi x + \pi a^2}{16\pi}$.

Đạo hàm: $S' = \frac{(4+\pi)x - a\pi}{8\pi}$; $S' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a\pi}{4+\pi}$.

d) Sai: Hàm S chỉ có một cực trị và là cực tiểu tại $x = \frac{a\pi}{4+\pi}$ suy ra $S_{\min} \Leftrightarrow x = \frac{a\pi}{4+\pi}$.

Câu 2. Từ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $MA^2 = MB^2 = MC^2$ người ta cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau là AMB , BNC , CPD và DQA . Với phần còn lại người ta gấp lên và ghép lại để thành hình chóp tứ giác đều.



Gọi cạnh đáy của mô hình là x (cm) với $x > 0$.

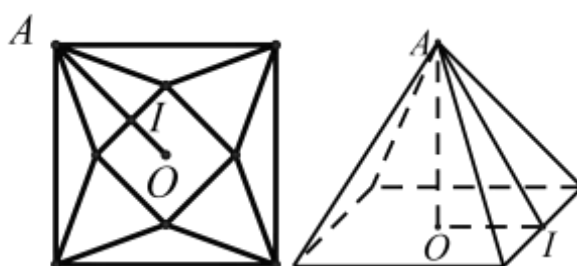
a) Chiều cao của hình chóp là $\sqrt{1250 - 25\sqrt{2}x}$.

b) Điều kiện của x là: $0 < x < 25\sqrt{2}$

c) Thể tích của khối chóp bằng $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{1250x^3 - 25\sqrt{2}x^4}$.

d) Khi cạnh đáy của khối chóp bằng $3\sqrt{2}$ dm thì thể tích của khối chóp là lớn nhất

Lời giải





a) Đúng : Gọi cạnh đáy của mô hình là x (cm) với $x > 0$. Ta có $AI = AO - IO = 25\sqrt{2} - \frac{x}{2}$.

Chiều cao của hình chóp $h = \sqrt{AI^2 - OI^2} = \sqrt{\left(25\sqrt{2} - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{1250 - 25\sqrt{2}x}$.

b) Đúng: Điều kiện $1250 - 25\sqrt{2}x > 0 \Rightarrow x < 25\sqrt{2}$.

c) Sai: Thể tích của khối chóp bằng $V = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \sqrt{1250 - 25\sqrt{2}x} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1250x^4 - 25\sqrt{2}x^5}$.

d) Sai: Xét hàm số $y = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1250x^4 - 25\sqrt{2}x^5}$ với $0 < x < 25\sqrt{2}$.

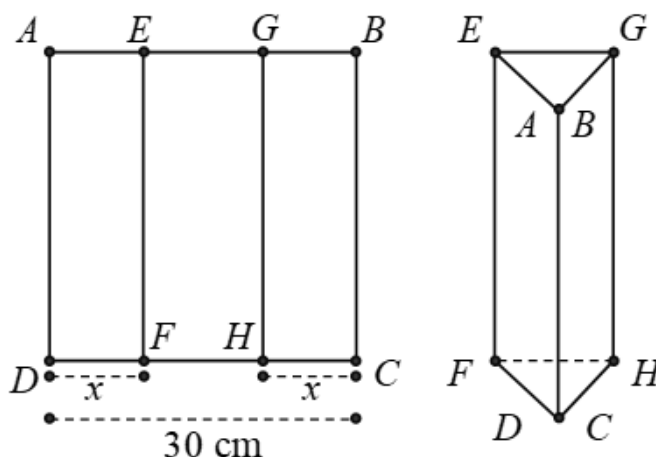
Ta có $y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{5000x^3 - 125\sqrt{2}x^4}{2\sqrt{1250x^4 - 25\sqrt{2}x^5}}$; $y' = 0 \Rightarrow 5000x^3 - 125\sqrt{2}x^4 = 0 \Rightarrow x = 20\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên

x	0	$20\sqrt{2}$	$25\sqrt{2}$
y'		+	0
y	0	$y_{\max}$	0

Vậy để mô hình có thể tích lớn nhất thì cạnh đáy của mô hình bằng $20\sqrt{2}$ cm = $2\sqrt{2}$ dm.

Câu 3. Một tấm kẽm hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 30 cm. Người ta gấp tấm kẽm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy.



a) Thể tích khối trụ được tính bằng công thức $V = 30S$ trong đó S là diện tích của tam giác AEG

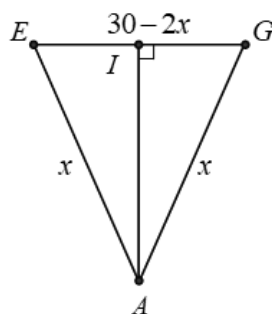
b) Diện tích của tam giác AEG bằng: $\sqrt{30} \cdot \sqrt{(15-x)^2(2x-15)}$

c) Giá trị của x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là $x = 10$ (cm)

d) Thể tích khối lăng trụ lớn nhất bằng 1250 (cm^3)



Lời giải



a) Đúng: Đường cao lăng trụ là $AD = AB = 30\text{cm}$ không đổi. Để thể tích lăng trụ lớn nhất chỉ cần diện tích đáy lớn nhất.

Gọi I là trung điểm cạnh $EG \Rightarrow AI \perp EG$ trong tam giác $AEG \Rightarrow IG = 15 - x, (0 < x < 15)$

Ta có: $AI = \sqrt{x^2 - \left(\frac{30-2x}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - (15-x)^2} = \sqrt{30x - 225}, x \in \left(\frac{15}{2}; 15\right).$

b) Sai: $S_{\triangle AEG} = \frac{1}{2} AI \cdot EG = \frac{1}{2} (30-2x) \sqrt{30x-225} = \sqrt{15} \cdot \sqrt{(15-x)^2 (2x-15)}$

Vậy ta cần tìm $x \in \left(\frac{15}{2}; 15\right)$ để $f(x) = (15-x)^2 (2x-15)$ lớn nhất.

$$f'(x) = -2(15-x)(2x-15) + 2(15-x)^2 = 2(15-x)(30-3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ x = 10 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

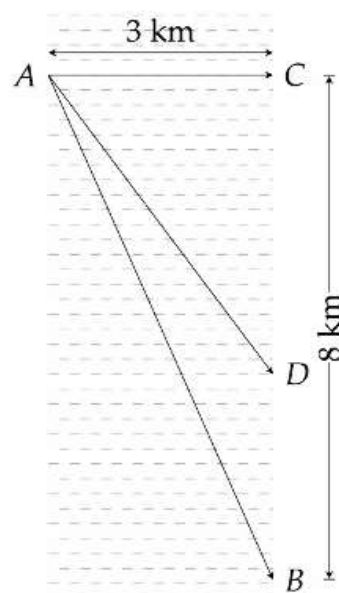
x	$15/2$	10	15
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	125	0

c) Đúng: Vậy thể tích lăng trụ lớn nhất khi $x = 10$.

d) Sai: Và thể tích lớn nhất bằng $125 \cdot 30 = 3750 (\text{cm}^3)$

Câu 4.

Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hay có thể chèo trực tiếp đến B , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8$ km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Gọi x (km) là độ dài quãng đường BD . Xét tính đúng sai trong các khẳng định sau:



a) $8 - x$ (km) là độ dài quãng đường CD .

b) Thời gian chèo thuyền trên quãng đường AD là: $\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3}$ (giờ)



c) Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $\frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{8-x}{8}$

d) Khoảng 1 giờ 20 phút là khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B .

Lời giải

a) Đúng: Gọi x (km) là độ dài quãng đường BD ; $8-x$ (km) là độ dài quãng đường CD .

b) Sai: Thời gian chèo thuyền trên quãng đường $AD = \sqrt{x^2+9}$ là: $\frac{\sqrt{x^2+9}}{6}$ (giờ)

Thời gian chạy trên quãng đường DB là: $\frac{8-x}{8}$ (giờ)

c) Sai: Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8}$ trên khoảng $(0; 8)$

Ta có $f'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+9} = 4x \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}}$

Bảng biến thiên

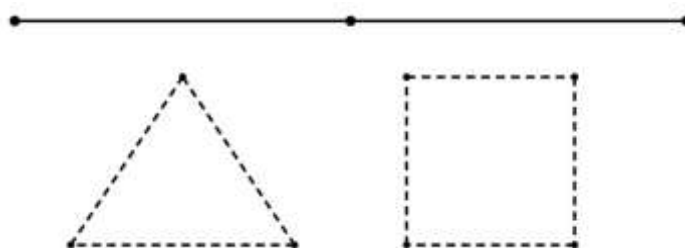
x	0	$\frac{9}{\sqrt{7}}$	8
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$	$\frac{\sqrt{73}}{6}$

d) Đúng: Dựa vào bảng biến thiên ta thấy thời gian ngắn nhất để di chuyển từ A đến B là $1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$

Vậy khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B là $1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1^h 20'$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cắt một đoạn dây dài 60m thành hai đoạn dây, đoạn dây thứ nhất gấp thành một tam giác đều có diện tích S_1 , đoạn dây thứ hai gấp thành một hình vuông có diện tích S_2 (như hình vẽ dưới)

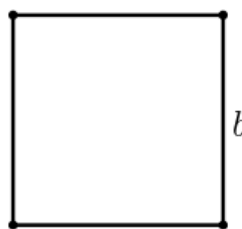
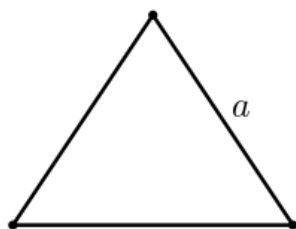




Khi đó giá trị nhỏ nhất của tổng $T = S_1 + S_2$ là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi độ dài đoạn dây gấp tam giác đều là x thì độ dài đoạn dây gấp hình vuông là $60 - x$ (mét)



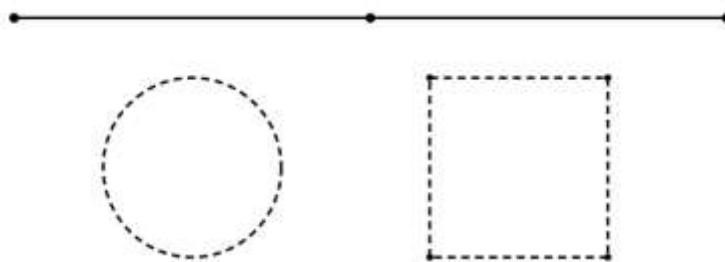
$$\text{Khi đó } x = 3a \Leftrightarrow a = \frac{x}{3} \Rightarrow S_1 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{36}$$

$$\text{Mặt khác: } 60 - x = 4b \Rightarrow b = \frac{60 - x}{4} \Rightarrow S_2 = b^2 = \left(\frac{60 - x}{4} \right)^2$$

$$\text{Khi đó } S_1 + S_2 = \frac{x^2 \sqrt{3}}{36} + \left(\frac{60 - x}{4} \right)^2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{(9 + 4\sqrt{3})x^2 - 1080x + 32400}{144}$$

$$\text{Dễ dàng tính được } (S_1 + S_2)_{\min} = \min f(x) = f\left(\frac{540}{9 + 4\sqrt{3}}\right) \approx 97,87 (\text{m}^2).$$

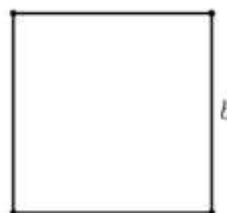
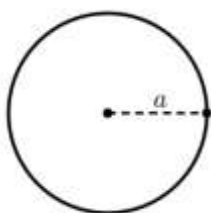
Câu 2: Cắt một đoạn dây dài 30m thành hai đoạn dây, đoạn dây thứ nhất gấp thành một đường tròn có diện tích S_1 , đoạn dây thứ hai gấp thành một hình vuông có diện tích S_2 (như hình vẽ dưới)



Khi đó giá trị nhỏ nhất của tổng $T = S_1 + S_2$ là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi độ dài đoạn dây gấp đường tròn là x thì độ dài đoạn dây gấp hình vuông là $30 - x$ (mét)



$$\text{Khi đó } x = 2\pi a \Leftrightarrow a = \frac{x}{2\pi} \Rightarrow S_1 = \pi a^2 = \frac{x^2}{4\pi}$$

$$\text{Mặt khác: } 30 - x = 4b \Rightarrow b = \frac{30 - x}{4} \Rightarrow S_2 = b^2 = \left(\frac{30 - x}{4} \right)^2$$

$$\text{Khi đó } S_1 + S_2 = \frac{x^2}{4\pi} + \left(\frac{30 - x}{4} \right)^2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 60\pi x + 900\pi}{16\pi}$$

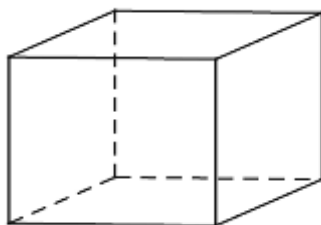
$$\text{Dễ dàng tính được } (S_1 + S_2)_{\min} = \min f(x) = f\left(\frac{30\pi}{\pi + 4}\right) \approx 31,51 (\text{m}^2).$$



Câu 3: Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp.

Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h = \frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m + n$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi chiều dài, chiều rộng của hộp là $2x$ và x ($x > 0$).

Khi đó, ta có thể tích của cái hộp là: $V = 2x^2 \cdot h \Rightarrow 2x^2 \cdot h = 48 \Leftrightarrow x^2 \cdot h = 24$

Do giá thành làm đáy và mặt bên hộp là 3, giá thành làm nắp hộp là 1 nên giá thành làm hộp là

$$L = 3(2x^2 + 2xh + 4xh) + 2x^2$$

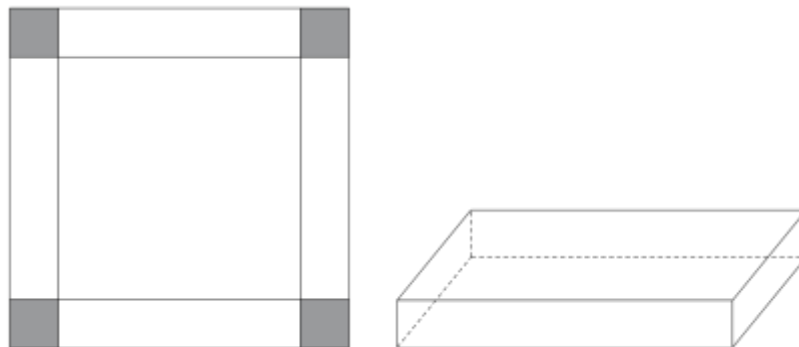
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm ta được:

$$L = 8x^2 + 9xh + 9xh \geq 3\sqrt{8x^2 \cdot 9xh \cdot 9xh} = 3\sqrt{648(x^2h)^2} = 216$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: } \begin{cases} 8x^2 = 9xh \\ x^2h = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9h}{8} \\ \frac{9^2}{8^2} \cdot h^3 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ h = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Vậy $m = 8, n = 3$ và $m + n = 11$.

Câu 4: Một tấm bìa hình vuông có diện tích 900 cm^2 . Người ta cắt ở bốn góc của tấm bìa đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x cm rồi gấp tấm bìa lại như hình vẽ bên để được một cái hộp không nắp có dạng hình hộp chữ nhật. Tìm thể tích lớn nhất mà hình hộp chữ nhật có thể thu được?



Lời giải

Cạnh của tấm bìa là $a = \sqrt{S} = \sqrt{900} = 30$ cm, đáy sẽ là hình vuông có cạnh bằng $30 - 2x$.



Thể tích thu được là: $V = (30 - 2x)^2 x = f(x)$ với $0 \leq x \leq \frac{a}{1} = 15$

Dễ dàng tính được: $V_{\max} = \max f(x) = f(5) = 2000(\text{cm}^3)$

Câu 5: Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (hình vẽ dưới). Đối với một hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.



Lời giải

Gọi độ dài của hàng rào song sông với bờ sông là x với $x > 0$

Gọi độ dài của mỗi hàng rào trong ba hàng rào song song nhau là y với $y > 0$

Diện tích đất mà bác nông dân rào được là: $xy(\text{m}^2)$

Tổng chi phí là 15 000 000 đồng nên ta có phương trình:

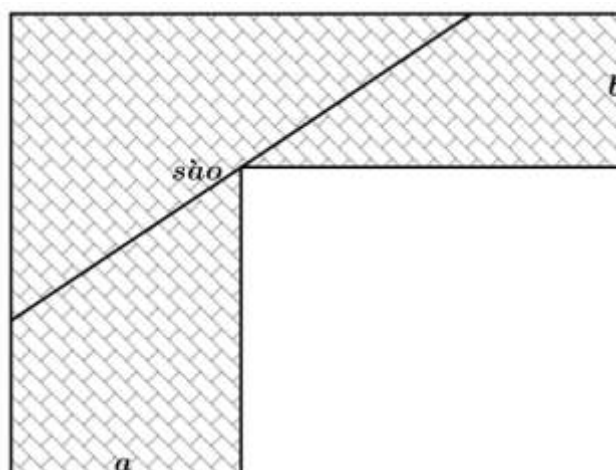
$$x60000 + 3y50000 = 15000000 \Rightarrow 6x + 15y = 1500$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có:

$$6x + 15y \geq 2\sqrt{6x \cdot 5y} \Rightarrow 1500 \geq 2\sqrt{30xy} \Rightarrow xy \leq 6250$$

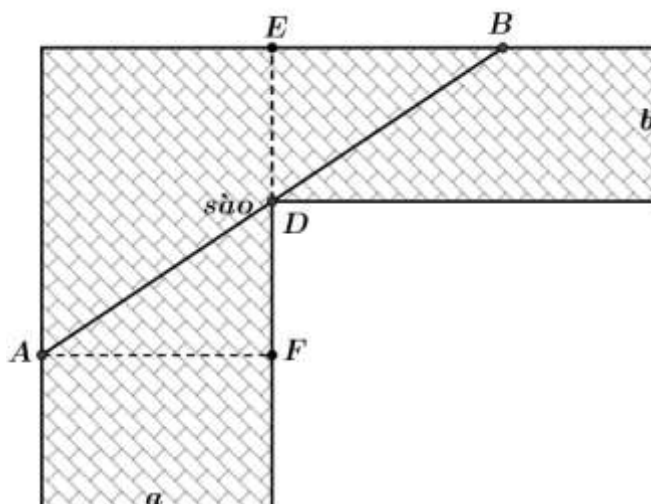
Vậy diện tích lớn nhất mà bác nông dân có thể tạo rào là $6250(\text{m}^2)$

Câu 6: Để chặn đường hành lang hình chữ L, người ta dùng một que sào thẳng dài đặt kín những điểm chạm với hành lang (như hình vẽ). Biết $a = 24$ và $b = 3$. Hỏi cái sào thỏa mãn điều kiện trên có chiều dài tối thiểu là bao nhiêu?





Lời giải



Đặt các điểm như hình vẽ.

Đặt $DF = x$, $x > 0$, ta có $\triangle ADF$ đồng dạng với $\triangle BED$ nên $\frac{EB}{ED} = \frac{AF}{DF} \Rightarrow EB = \frac{ab}{x}$

Gọi l là chiều dài của que sào, ta có $l^2 = AB^2 = (x+b)^2 + \left(a + \frac{ab}{x}\right)^2 = f(x)$.

Đạo hàm: $f'(x) = 2(x+b) - 2\frac{ab}{x^2}\left(a + \frac{ab}{x}\right) = 2(x+b)\left(1 - \frac{a^2b}{x^3}\right)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a^2b} = 12$.

Dễ dàng suy ra được $\min f(x) = f(12) = 1125$

Vậy giá trị nhỏ nhất của que sào là $l = \sqrt{1125} = 15\sqrt{5}$.

-----HẾT-----