

CHỦ ĐỀ TOÁN THỰC TẾ

DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

Phần I. Lý thuyết.

I. Dãy số

1. Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số), kí hiệu là $u = u(n)$.

Ta thường viết u_n thay cho $u(n)$ và kí hiệu dãy số $u = u(n)$ bởi (u_n) , do đó dãy số (u_n) được viết dưới dạng khai triển $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$. Số u_1 gọi là số hạng đầu, u_n là số hạng thứ n và gọi là số hạng tổng quát của dãy số.

2. Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1; 2; 3; \dots; m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn. Dạng khai triển của dãy số hữu hạn là $u_1, u_2, \dots, u_m$. Số u_1 gọi là số hạng đầu, u_m là số hạng cuối.

3. Một dãy số có thể cho bằng:

- Liệt kê các số hạng (chỉ dùng cho các dãy hữu hạn và có ít số hạng);
- Công thức của số hạng tổng quát;
- Phương pháp mô tả;
- Phương pháp truy hồi.

4. Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \geq m \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m, M sao cho $m \leq u_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

II. Cấp số cộng

1. Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d . Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

2. Cấp số cộng (u_n) với công sai d được cho bởi hệ thức truy hồi: $u_n = u_{n-1} + d, (n \geq 2)$.

3. Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định theo công thức: $u_n = u_1 + (n-1)d$.

4. Cho cấp số cộng (u_n) với công sai d . Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Khi đó

$$S_n = \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d] = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}.$$

III. Cấp số nhân

1. Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q . Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.

2. Cấp số nhân (u_n) với công bội q được cho bởi hệ thức truy hồi: $u_n = u_{n-1} \cdot q, (n \geq 2)$.

3. Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, (n \geq 2)$.

Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Khi đó: $S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}$.

Phần II. Bài tập

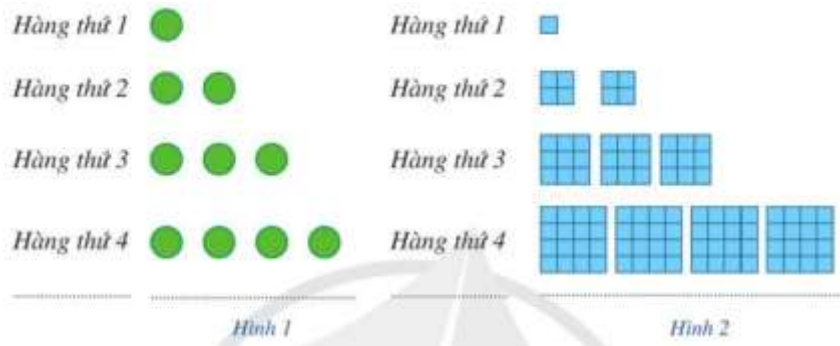
A. Bài tập

DÃY SỐ

Câu 1:

a) Gọi u_n là số chấm ở hàng thứ n trong Hình 1. Dự đoán công thức của số hạng tổng quát cho dãy số (u_n) .

b) Gọi v_n là tổng diện tích của các hình tô màu ở hàng thứ n trong Hình 2 (mỗi ô vuông nhỏ là một đơn vị diện tích). Dự đoán công thức của số hạng tổng quát cho dãy số (v_n) .



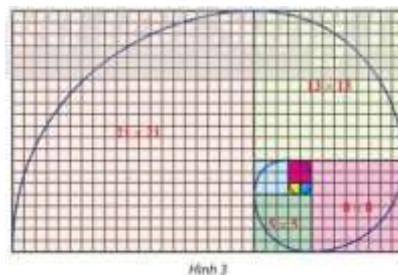
Câu 2: Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép như sau: Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là 0,5% một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

a) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng.

b) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng.

c) Dự đoán công thức của P_n tính theo n .

Câu 3: Trên lưới ô vuông, mỗi ô cạnh 1 đơn vị, người ta vẽ 8 hình vuông và tô màu khác nhau như Hình 3. Tìm dãy số biểu diễn độ dài cạnh của 8 hình vuông đó từ nhỏ đến lớn. Có nhận xét gì về dãy số trên?



Câu 4: Ông An gửi tiết kiệm 100 triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6% một năm theo hình thức tính lãi kép. Số tiền (triệu đồng) của ông An thu được sau n tháng được cho bởi công thức

$$A_n = 100 \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^n.$$

a) Tìm số tiền ông An nhận được sau tháng thứ nhất, sau tháng thứ hai.

b) Tìm số tiền ông An nhận được sau 1 năm.

Câu 5: Chị Hương vay trả góp một khoản tiền 100 triệu đồng và đồng ý trả dần 2 triệu đồng mỗi tháng với lãi suất 0,8% số tiền còn lại của mỗi tháng.

Gọi A_n ($n \in \mathbb{N}$) là số tiền còn nợ (triệu đồng) của chị Hương sau n tháng.

a) Tìm lần lượt $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ để tính số tiền còn nợ của chị Hương sau 6 tháng.

b) Dự đoán hệ thức truy hồi đối với dãy số (A_n) .

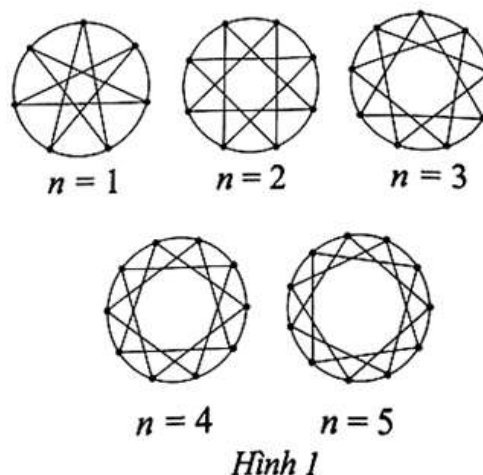
Câu 6: Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo hình thức lãi kép như sau: Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là 0,5% một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

a) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng.

b) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng.

c) Dự đoán công thức của P_n .

Câu 7: Với mỗi số nguyên dương n , lấy $n+6$ điểm cách đều nhau trên đường tròn. Nối mỗi điểm với điểm cách nó hai điểm trên đường tròn đó để tạo thành các ngôi sao như Hình 1. Gọi u_n là số đo góc ở đỉnh tính theo đơn vị độ của mỗi ngôi sao thì ta được dãy số (u_n) . Tìm công thức của số hạng tổng quát u_n .



Hình 1

Câu 8: Bác Hưng để 10 triệu đồng trong tài khoản ngân hàng. Vào cuối mỗi năm, ngân hàng trả lãi 3% vào tài khoản của bác ấy, nhưng sau đó sẽ tính phí duy trì tài khoản hằng năm là 120 nghìn đồng.

a) Gọi A_0 là số tiền bác Hưng đã gửi. Viết công thức tính lần lượt A_1, A_2, A_3 . Từ đó dự đoán hệ thức truy hồi cho số dư A_n (tính theo đơn vị đồng) trong tài khoản của bác Hưng vào cuối năm thứ n .

b) Tìm số dư trong tài khoản của bác Hưng sau 4 năm.

Câu 9: Giá của một chiếc máy photocopy lúc mới mua là 50 triệu đồng. Biết rằng giá trị của nó sau mỗi năm sử dụng chỉ còn 75% giá trị trong năm liền trước đó. Tính giá trị còn lại của chiếc máy photocopy đó sau mỗi năm, trong khoảng thời gian 5 năm kể từ khi mua.

Câu 10: Nếu tỉ lệ lạm phát là 3,5% mỗi năm và giá trung bình của một căn hộ chung cư mới tại thời điểm hiện tại là 2,5 tỉ đồng thì giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau n năm nữa được cho bởi công thức $A_n = 2,5 \cdot (1,035)^n$ (tỉ đồng)

Câu 11: Bác An gửi tiết kiệm 200 triệu đồng kì hạn 3 tháng, với lãi suất 3% một năm. Số tiền (triệu đồng) cả vốn lẫn lãi mà bác An nhận được sau n quý (mỗi quý là 3 tháng) sẽ là

$$A_n = 200 \left(1 + \frac{0,03}{4} \right)^n, n = 0, 1, 2, \dots$$

a) Viết ba số hạng đầu của dãy số.

b) Tìm số tiền bác An nhận được sau 2 năm.

Câu 12: Vi khuẩn E. Coli sinh sản thông qua một quá trình gọi là quá trình phân đôi. Vi khuẩn E. Coli phân chia làm đôi cứ sau 20 phút. Giả sử tốc độ phân chia này được duy trì trong 12 giờ kể từ khi vi khuẩn ban đầu xâm nhập vào cơ thể. Hỏi sau 12 giờ sẽ có bao nhiêu vi khuẩn E. Coli trong cơ thể? Giả sử có một nguồn dinh dưỡng vô hạn để vi khuẩn E. Coli duy trì tốc độ phân chia như cũ trong 48 giờ kể từ khi vi khuẩn ban đầu xâm nhập vào cơ thể. Hỏi sau 48 giờ sẽ có bao nhiêu vi khuẩn E. Coli trong cơ thể?

Câu 13: Một công ty dược phẩm đang thử nghiệm một loại thuốc mới. Một thí nghiệm bắt đầu với $1,0 \times 10^9$ vi khuẩn. Một liều thuốc được sử dụng sau mỗi bốn giờ có thể tiêu diệt $4,0 \times 10^8$ vi khuẩn. Giữa các liều thuốc, số lượng vi khuẩn tăng lên 25%.

a) Viết hệ thức truy hồi cho số lượng vi khuẩn sống trước mỗi lần sử dụng thuốc.

b) Tìm số vi khuẩn còn sống trước lần sử dụng thuốc thứ năm.

CẤP SỐ CỘNG

Câu 1: Chiều cao (đơn vị: centimét) của một đứa trẻ n tuổi phát triển bình thường được cho bởi công thức:

$$x_n = 75 + 5(n - 1).$$

(Nguồn: <https://bibabo.vn>)

a) Một đứa trẻ phát triển bình thường có chiều cao năm 3 tuổi là bao nhiêu centimét?

b) Dãy số (x_n) có là một cấp số cộng không? Trung bình một năm, chiều cao mỗi đứa trẻ phát triển bình thường tăng lên bao nhiêu centimét?

Câu 2: Khi kí kết hợp đồng lao động với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau:

Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu.

Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu.

Nếu là người được tuyển dụng vào doanh nghiệp trên, em sẽ chọn phương án nào khi:

- a) Kí hợp đồng lao động 3 năm?
- b) Kí hợp đồng lao động 10 năm?

Câu 3: Một người muốn mua một thanh gỗ đủ để cắt ra làm các thanh ngang của một cái thang. Biết rằng chiều dài các thanh ngang của cái thang đó (từ bậc dưới cùng) lần lượt là 45 cm, 43 cm, 41 cm, ..., 31 cm.



- a) Cái thang đó có bao nhiêu bậc?
- b) Tính chiều dài thanh gỗ mà người đó cần mua, giả sử chiều dài các mối nối (phần gỗ bị cắt thành mùn cưa) là không đáng kể.

Câu 4: Khi một vận động viên nhảy dù nhảy ra khỏi máy bay, giả sử quãng đường người ấy rơi tự do (tính theo feet) trong mỗi giây liên tiếp theo thứ tự trước khi bung dù lần lượt là: 16; 48; 80; 112; 144; ... (các quãng đường này tạo thành cấp số cộng).



- a) Tính công sai của cấp số cộng trên.
- b) Tính tổng chiều dài quãng đường rơi tự do của người đó trong 10 giây đầu tiên.

Câu 5: Ở một loài thực vật lưỡng bội, tính trạng chiều cao cây do hai gene không alen là A và B cùng quy định theo kiểu tương tác cộng gộp. Trong kiểu gene nếu cứ thêm một alen trội A hay B thì chiều cao cây tăng thêm 5 cm. Khi trưởng thành, cây thấp nhất của loài này với kiểu gene aabb có chiều cao 100 cm. Hỏi cây cao nhất với kiểu gene AABB có chiều cao bao nhiêu?

Câu 6: Giá của một chiếc xe ô tô lúc mới mua là 680 triệu đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá của chiếc xe ô tô giảm 55 triệu đồng. Tính giá còn lại của chiếc xe sau 5 năm sử dụng.

Câu 7: Một kiến trúc sư thiết kế một hội trường với 15 ghế ngồi ở hàng thứ nhất, 18 ghế ngồi ở hàng thứ hai, 21 ghế ngồi ở hàng thứ ba, và cứ như vậy (số ghế ở hàng sau nhiều hơn 3 ghế so với số ghế ở hàng liền trước nó). Nếu muốn hội trường đó có sức chứa ít nhất 870 ghế ngồi thì kiến trúc sư đó phải thiết kế tối thiểu bao nhiêu hàng ghế?

Câu 8: Vào năm 2020, dân số của một thành phố là khoảng 1,2 triệu người. Giả sử mỗi năm, dân số của thành phố này tăng thêm khoảng 30 nghìn người. Hãy ước tính dân số của thành phố này vào năm 2030.

Câu 9: Một ruộng bậc thang có thửa thấp nhất (bậc thứ nhất) nằm ở độ cao 950 m so với mực nước biển, độ chênh lệch giữa thửa trên và thửa dưới trung bình là 1,5 m. Hỏi thửa ruộng ở bậc thứ 12 có độ cao là bao nhiêu mét so với mực nước biển?



Hình 1

Câu 10: Bác Tư vào làm cho một công ty với hợp đồng về tiền lương mỗi năm như sau:

Năm thứ nhất: 240 triệu;

Từ năm thứ hai trở đi: Mỗi năm tăng thêm 12 triệu.

Tính số tiền lương một năm của bác Tư vào năm thứ 11.

Câu 11: Một rạp hát có 20 hàng ghế. Hàng thứ nhất có 20 ghế, số ghế ở các hàng sau đều hơn số ghế ngay trước đó một ghế. Cho biết rạp hát đã bán hết vé với giá mỗi vé là 60 nghìn đồng. Tính tổng số tiền vé thu được của rạp hát.

Câu 12: Khi kí kết hợp đồng lao động với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau:

Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu đồng. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu đồng.

Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu đồng. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu đồng.

Nếu là người được tuyển dụng vào doanh nghiệp trên, em nên chọn phương án nào khi:

a) Kí hợp đồng lao động 3 năm?

b) Kí hợp đồng lao động 10 năm?

Câu 13: Chuông đồng hồ ở một toà tháp đánh số tiếng đúng bằng số giờ và cứ mỗi 30 phút không phải là giờ đúng thì đánh 1 tiếng chuông. Hỏi bắt đầu từ lúc 1 giờ đêm đến 12 giờ trưa, chuông đồng hồ đó đã đánh tất cả bao nhiêu tiếng?

Câu 14: Bác Hưng để 10 triệu đồng trong tài khoản ngân hàng. Vào cuối mỗi năm, ngân hàng trả lãi 3% vào tài khoản của bác ấy, nhưng sau đó sẽ tính phí duy trì tài khoản hằng năm là 120 nghìn đồng.

a) Gọi A_0 là số tiền bác Hưng đã gửi. Viết công thức tính lần lượt A_1, A_2, A_3 . Từ đó dự đoán hệ thức truy hồi cho số dư A_n (tính theo đơn vị đồng) trong tài khoản của bác Hưng vào cuối năm thứ n .

b) Tìm số dư trong tài khoản của bác Hưng sau 4 năm.

Câu 15: Giá của một chiếc máy photocopy lúc mới mua là 50 triệu đồng. Biết rằng giá trị của nó sau mỗi năm sử dụng chỉ còn 75% giá trị trong năm liền trước đó. Tính giá trị còn lại của chiếc máy photocopy đó sau mỗi năm, trong khoảng thời gian 5 năm kể từ khi mua.

Câu 16: Nếu tỉ lệ lạm phát là 3,5% mỗi năm và giá trung bình của một căn hộ chung cư mới tại thời điểm hiện tại là 2,5 tỉ đồng thì giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau n năm nữa được cho bởi công thức $A_n = 2,5 \cdot (1,035)^n$ (tỉ đồng)

Câu 17: Bác An gửi tiết kiệm 200 triệu đồng kì hạn 3 tháng, với lãi suất 3% một năm. Số tiền (triệu đồng) cả vốn lẫn lãi mà bác An nhận được sau n quý (mỗi quý là 3 tháng) sẽ là

$$A_n = 200 \left(1 + \frac{0,03}{4} \right)^n, n = 0, 1, 2, \dots$$

- a) Viết ba số hạng đầu của dãy số.
- b) Tìm số tiền bác An nhận được sau 2 năm.

Câu 18: Vi khuẩn E. Coli sinh sản thông qua một quá trình gọi là quá trình phân đôi. Vi khuẩn E. Coli phân chia làm đôi cứ sau 20 phút. Giả sử tốc độ phân chia này được duy trì trong 12 giờ kể từ khi vi khuẩn ban đầu xâm nhập vào cơ thể. Hỏi sau 12 giờ sẽ có bao nhiêu vi khuẩn E. Coli trong cơ thể? Giả sử có một nguồn dinh dưỡng vô hạn để vi khuẩn E. Coli duy trì tốc độ phân chia như cũ trong 48 giờ kể từ khi vi khuẩn ban đầu xâm nhập vào cơ thể. Hỏi sau 48 giờ sẽ có bao nhiêu vi khuẩn E. Coli trong cơ thể?

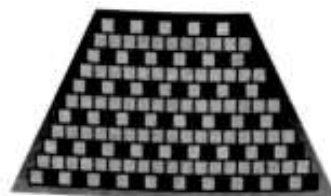
Câu 19: Một công ty dược phẩm đang thử nghiệm một loại thuốc mới. Một thí nghiệm bắt đầu với $1,0 \times 10^9$ vi khuẩn. Một liều thuốc được sử dụng sau mỗi bốn giờ có thể tiêu diệt $4,0 \times 10^8$ vi khuẩn. Giữa các liều thuốc, số lượng vi khuẩn tăng lên 25%.

- a) Viết hệ thức truy hồi cho số lượng vi khuẩn sống trước mỗi lần sử dụng thuốc.
- b) Tìm số vi khuẩn còn sống trước lần sử dụng thuốc thứ năm.

Câu 20: Một hội trường lớn có 35 ghế ở hàng đầu tiên, 37 ghế ở hàng thứ hai, 39 ghế ở hàng thứ ba và cứ tiếp tục theo quy luật như vậy. Có tất cả 27 hàng ghế. Hỏi hội trường đó có bao nhiêu ghế?

Câu 21: Phải lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của một cấp số cộng có số hạng đầu là 78 và công sai là -4 để được tổng là 702?

Câu 22: Một bức tường trang trí có dạng hình thang, rộng 2,4 m ở đáy và rộng 1,2 m ở đỉnh (hình vẽ bên). Các viên gạch hình vuông có kích thước 10 cm × 10 cm phải được đặt sao cho mỗi hàng ở phía trên chứa ít hơn một viên so với hàng ở ngay phía dưới nó. Hỏi sẽ cần bao nhiêu viên gạch hình vuông như vậy để ốp hết bức tường đó?



Câu 23: Một cầu thang bằng gạch có tổng cộng 30 bậc. Bậc dưới cùng cần 100 viên gạch. Mỗi bậc tiếp theo cần ít hơn hai viên gạch so với bậc ngay trước nó.

- a) Cần bao nhiêu viên gạch cho bậc trên cùng?
- b) Cần bao nhiêu viên gạch để xây cầu thang?

Câu 24: Có bao nhiêu hàng ghế trong một góc khán đài của một sân vận động, biết mỗi hàng ghế sau có thêm 4 chỗ ngồi so với hàng ghế ngay trước nó?

Câu 25: Nếu anh Nam nhận được lời mời làm việc cho một công ty nước ngoài với mức lương khởi điểm là 35000 đô la mỗi năm và được tăng thêm 1400 đô la lương mỗi năm, thì sẽ mất bao nhiêu năm làm việc để tổng lương mà anh Nam nhận được là 319200 đô la?

Câu 26. Người ta trồng cây theo các hàng ngang với quy luật: ở hàng thứ nhất có 1 cây, ở hàng thứ hai có 2 cây, ở hàng thứ ba có 3 cây, .. ở hàng thứ n có n cây. Biết rằng người ta trồng hết 4950 cây. Hỏi số hàng cây được trồng theo cách trên là bao nhiêu?

Câu 27. Giả sử một quần thể động vật ở thời điểm ban đầu có 110000 cá thể, quần thể này có tỉ lệ sinh là 12% /năm, xuất cư là 2% /năm, tử vong là 8% / năm. Dự đoán số cá thể của quần thể đó sau hai năm.

Câu 28. Từ 0 giờ đến 12 giờ trưa, chuông của một chiếc đồng hồ quả lắc sẽ đánh bao nhiêu tiếng, biết rằng nó chỉ đánh chuông báo giờ và số tiếng chuông bằng số giờ?

Câu 29. Bác Hưng quyết định tham gia một chương trình bơi lội để duy trì sức khỏe. Bác bắt đầu bằng cách bơi 10 phút vào ngày đầu tiên, sau đó thêm 2 phút mỗi ngày sau đó.

- Tìm công thức truy hồi cho số phút T_n mà bác ấy bơi vào ngày thứ n của chương trình.
- Tìm sáu số hạng đầu của dãy số T_n .
- Tìm công thức tổng quát của dãy số (T_n) .
- Bác Hưng đạt được mục tiêu bơi ít nhất 60 phút mỗi ngày vào ngày thứ bao nhiêu của chương trình?
- Tính tổng thời gian bác Hưng bơi sau 30 ngày đầu của chương trình.

Câu 30. Dãy các số chính phương sau đây không phải là cấp số cộng 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, ... Tuy nhiên, chúng ta có thể lập một cấp số cộng liên quan bằng cách tìm hiệu của các số hạng liên tiếp của dãy số này.

- Viết tám số hạng đầu của cấp số cộng liên quan được mô tả ở trên. Tìm công thức của số hạng thứ n của cấp số cộng này.
- Mô tả bằng cách nào để chúng ta có thể lập được một cấp số cộng từ dãy các số lập phương sau đây: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, ...
- Viết bảy số hạng đầu của cấp số cộng ở trong phần b) và tìm số hạng thứ n của nó.

CẤP SỐ NHÂN

Câu 1: Một tỉnh có 2 triệu dân vào năm 2020 với tỉ lệ tăng dân số là 1% / năm. Gọi u_n là số dân của tỉnh đó sau n năm. Giả sử tỉ lệ tăng dân số là không đổi.

- Viết công thức tính số dân của tỉnh đó sau n năm kể từ năm 2020.
- Tính số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020.

Câu 2: Một gia đình mua một chiếc ô tô giá 800 triệu đồng. Trung bình sau mỗi năm sử dụng, giá trị còn lại của ô tô giảm đi 4% (so với năm trước đó).

- Viết công thức tính giá trị của ô tô sau 1 năm, 2 năm sử dụng.
- Viết công thức tính giá trị của ô tô sau n năm sử dụng.
- Sau 10 năm, giá trị của ô tô ước tính còn bao nhiêu triệu đồng?

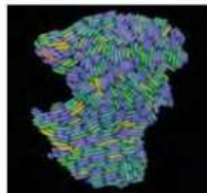
Câu 3: Một người nhảy bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây đai an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây

dài 100 m. Sau mỗi lần rơi xuống, nhờ sự đàn hồi của dây, người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 75% so với lần rơi trước đó và lại bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên (Hình 3). Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần kéo lên và lại rơi xuống.



Hình 3

Câu 4: Một loại vi khuẩn được nuôi cấy trong phòng thí nghiệm, cứ mỗi phút số lượng lại tăng lên gấp đôi số lượng đang có. Từ một vi khuẩn ban đầu, hãy tính tổng số vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 20 phút.



Hình 2

Câu 5: Giả sử một thành phố có dân số năm 2022 là khoảng 2,1 triệu người và tốc độ gia tăng dân số trung bình mỗi năm là 0,75%.

- Dự đoán dân số của thành phố đó vào năm 2032.
- Nếu tốc độ gia tăng dân số vẫn giữ nguyên như trên thì ước tính vào năm nào dân số của thành phố đó sẽ tăng gấp đôi so với năm 2022?

Câu 6: Trong trò chơi mạo hiểm nhảy bungee, mỗi lần nhảy, người chơi sẽ được dây an toàn có tính đàn hồi kéo nảy ngược lên 60% chiều sâu của cú nhảy. Một người chơi bungee thực hiện cú nhảy đầu tiên có độ cao nảy ngược lên là 9 m.

- Tính độ cao nảy ngược lên của người đó ở lần nảy thứ ba.
- Tính tổng các độ cao nảy ngược lên của người đó trong 5 lần nảy đầu.



Hình 3

Câu 7: Một công ty xây dựng mua một chiếc máy ủi với giá 3 tỉ đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá trị của chiếc máy ủi này lại giảm 20% so với giá trị của nó trong năm liền trước đó. Tìm giá trị còn lại của chiếc máy ủi đó sau 5 năm sử dụng.

Câu 8: Vào năm 2020, dân số của một quốc gia là khoảng 97 triệu người và tốc độ tăng trưởng dân số là 0,91%. Nếu tốc độ tăng trưởng dân số này được giữ nguyên hằng năm, hãy ước tính dân số của quốc gia đó vào năm 2030.

Câu 9: Một loại thuốc được dùng mỗi ngày một lần. Lúc đầu nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân tăng nhanh, nhưng mỗi liều kế tiếp có tác dụng ít hơn liều trước đó. Lượng thuốc trong máu ở ngày thứ nhất là 50mg, và mỗi ngày sau đó giảm chỉ còn một nửa so với ngày kế trước đó. Tính tổng lượng thuốc (tính bằng mg) trong máu của bệnh nhân sau khi dùng thuốc 10 ngày liên tiếp.

Câu 10: Ban đầu, một quả lắc đồng hồ dao động theo một cung tròn dài 46 cm (H. 2.1). Sau mỗi lần đu liên tiếp, độ dài của cung tròn bằng 0,98 độ dài cung tròn ở ngay lần trước đó.

a) Độ dài của cung tròn ở lần thứ 10 là bao nhiêu?

b) Sau 15 lần dao động, quả lắc sẽ đi được quãng đường tổng cộng là bao nhiêu?

(Kết quả tính theo centimét và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



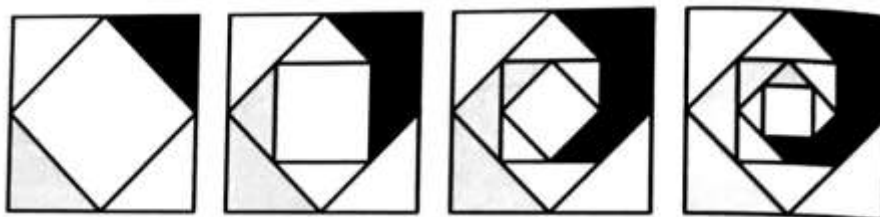
Hình 2.1

Câu 11: Các bệnh truyền nhiễm có thể lây lan rất nhanh. Giả sử có năm người bị bệnh trong tuần đầu tiên của một đợt dịch, và mỗi người bị bệnh sẽ lây bệnh cho bốn người vào cuối tuần tiếp theo. Tính đến hết tuần thứ 10 của đợt dịch, có bao nhiêu người đã bị lây bởi căn bệnh này?

Câu 12: Nếu một kĩ sư được một công ty thuê với mức lương hằng năm là 180 triệu đồng và nhận được mức tăng lương hằng năm là 5%, thì mức lương của người kĩ sư đó là bao nhiêu khi bắt đầu năm thứ sáu làm việc cho công ty?

Câu 13: Để tích lũy tiền cho việc học đại học của con gái, cô Hoa quyết định hằng tháng bỏ ra 500 nghìn đồng vào tài khoản tiết kiệm, được trả lãi 0,5% cộng dồn hằng tháng. Có bắt đầu chương trình tích lũy này khi con gái cô tròn 3 tuổi. Cô ấy sẽ tích lũy được bao nhiêu tiền vào thời điểm gửi khoản tiền thứ 180? Lúc này con gái cô Hoa bao nhiêu tuổi?

Câu 14: Các cạnh của hình vuông ban đầu có chiều dài 16 cm. Một hình vuông nhỏ được hình thành bằng cách nối các điểm giữa của các cạnh của hình vuông ban đầu và hai trong số các hình tam giác kết quả được tô màu (hình vẽ dưới). Nếu quá trình này được lặp lại năm lần nữa, hãy xác định tổng diện tích của vùng được tô màu.



Câu 15: Một loại vi khuẩn được nuôi cấy trong ống nghiệm, cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Nếu ban đầu có 200 vi khuẩn, tính số lượng vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 2 giờ.

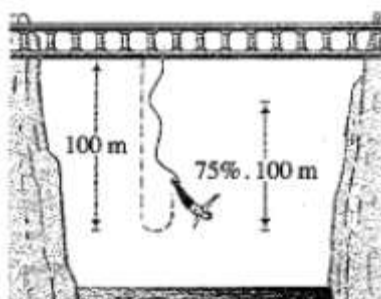


Hình 1

Câu 16: Bác Năm gửi tiết kiệm vào ngân hàng 100 triệu đồng với hình thức lãi kép, kì hạn một năm với lãi suất 8%/năm. Tính số tiền cả gốc và lãi bác Năm nhận được sau 10 năm. (Giả sử lãi suất không thay đổi trong suốt thời gian gửi tiền.)

Câu 17: Một người chơi nhảy bungee trên một cây cầu với một sợi dây dài 100m. Sau mỗi lần rơi xuống, người chơi được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 80% so với lần rơi trước và lại rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên. Tính tổng quãng đường đi lên của người đó sau 10 lần được kéo lên.

Câu 18: Một người nhảy bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây đai an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây dài 100 m. Giả sử sau mỗi lần rơi xuống, người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ cao bằng 75% so với lần rơi trước đó và lại bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên (Hình 3). Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần rơi xuống và lại được kéo lên, tính từ lúc bắt đầu nhảy (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



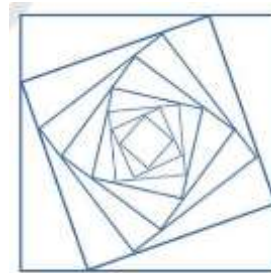
Hình 3

Câu 19: Anh Dũng kí hợp đồng lao động trong 10 năm với phương án trả lương như sau: Năm thứ nhất, tiền lương của anh Dũng là 120 triệu đồng. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương của anh Dũng được tăng lên 10%. Tính tổng số tiền lương anh Dũng lĩnh được trong 10 năm đầu đi làm (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị triệu đồng).

Bài 20: Một cái tháp có 11 tầng. Diện tích của mặt sàn tầng 2 bằng nửa diện tích của mặt đáy tháp và diện tích của mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt sàn mỗi tầng ngay bên dưới. Biết mặt đáy tháp có diện tích là 12288 m^2 . Tính diện tích của mặt sàn tầng trên cùng của tháp theo đơn vị mét vuông.

Bài 21: Một khay nước có nhiệt độ 23°C được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước giảm 20%. Tính nhiệt độ của khay nước đó sau 6 giờ theo đơn vị độ C.

Bài 22: Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 4. Người ta chia mỗi cạnh hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 (Hình 4). Từ hình vuông C_2 lại làm tiếp tục như trên để có hình vuông C_3 . Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$. Gọi a_n là độ dài cạnh hình vuông C_n . Chứng minh rằng dãy số (a_n) là cấp số nhân.



Hình 4

Bài 23: Ông An vay ngân hàng 1 tỉ đồng với lãi suất 12% / năm. Ông đã trả nợ theo cách: Bắt đầu từ tháng thứ nhất sau khi vay, cuối mỗi tháng ông trả ngân hàng cùng số tiền là a (đồng) và đã trả hết nợ sau đúng 2 năm kể từ ngày vay. Hỏi số tiền mỗi tháng mà ông An phải trả là bao nhiêu đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?

Câu 24: Một cây đàn organ có tần số âm thanh các phím liên tiếp tạo thành một cấp số nhân. Cho biết tần số phím La Trung là 400 Hz và tần số của phím LaCao cao hơn 12 phím là 800 Hz (nguồn: <https://vi.wikipedia.org/wiki/Organ>). Tìm công bội của cấp số nhân nói trên (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Câu 25: Dân số Việt Nam năm 2020 là khoảng 97,6 triệu người (theo *Niên giám thống kê năm 2020*). Nếu trung bình mỗi năm tăng 1,14% thì ước tính dân số Việt Nam năm 2040 là khoảng bao nhiêu người (làm tròn kết quả đến hàng trăm nghìn)?

Câu 26: Tế bào $E. Coli$ trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Hỏi sau 24 giờ, tế bào ban đầu sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

Câu 27: Mặt sàn tầng một (tầng trệt) của một ngôi nhà cao hơn mặt sân 0,5 m. Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai gồm 25 bậc, mỗi bậc cao 16 cm.

a) Viết công thức để tìm độ cao của bậc cầu thang thứ n so với mặt sân.

b) Tính độ cao của sàn tầng hai so với mặt sân.

Câu 28: Một hình vuông màu vàng có cạnh 1 đơn vị dài được chia thành chín hình vuông nhỏ hơn và hình vuông ở chính giữa được tô màu xanh như Hình 2.1 Mỗi hình vuông màu vàng nhỏ hơn lại được chia thành chín hình vuông con, và mỗi hình vuông con ở chính giữa lại được tô màu xanh. Nếu quá trình này được tiếp tục lặp lại năm lần, thì tổng diện tích các hình vuông được tô màu xanh bao nhiêu?

Câu 29: Một tháp 10 tầng có diện tích sàn của tầng dưới cùng là $6144m^2$. Tính diện tích mặt sàn tầng trên cùng, biết rằng diện tích mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt sàn tầng ngay bên dưới.



Hình 1

Câu 30: Một khay nước có nhiệt độ 20°C được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Cho biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước đá giảm đi 25%. Tính nhiệt độ khay nước đó sau 4 giờ.



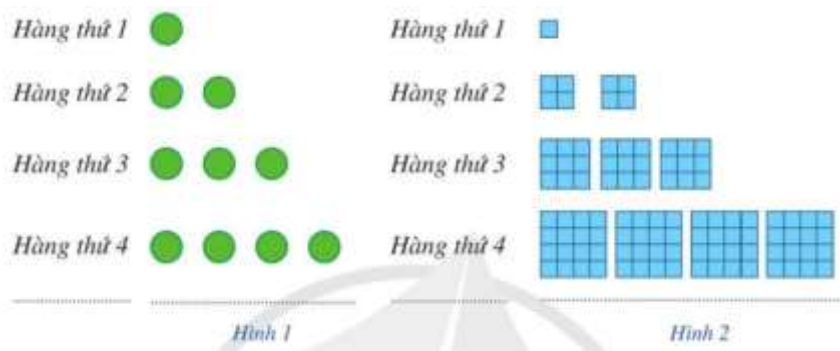
Hình 2

B. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

DÃY SỐ

Câu 1:

- a) Gọi u_n là số chấm ở hàng thứ n trong Hình 1. Dự đoán công thức của số hạng tổng quát cho dãy số (u_n) .
- b) Gọi v_n là tổng diện tích của các hình tô màu ở hàng thứ n trong Hình 2 (mỗi ô vuông nhỏ là một đơn vị diện tích). Dự đoán công thức của số hạng tổng quát cho dãy số (v_n) .



Lời giải

- a) Số chấm ở hàng thứ nhất là: $u_1 = 1$;
 Số chấm ở hàng thứ hai là: $u_2 = 2$;
 Số chấm ở hàng thứ ba là: $u_3 = 3$;
 Số chấm ở hàng thứ tư là: $u_4 = 4$;
 Vậy số chấm ở hàng thứ n là: $u_n = n$.
- b) Diện tích của các ô màu ở hàng thứ nhất là: $v_1 = 1 = 1^2$;
 Diện tích của các ô màu ở hàng thứ hai là: $v_2 = 4 = 2^2$;
 Diện tích của các ô màu ở hàng thứ ba là: $v_3 = 9 = 3^2$;
 Diện tích của các ô màu ở hàng thứ tư là: $v_4 = 16 = 4^2$;
 Vậy diện tích của các ô màu ở hàng thứ n là: $v_n = n^2$.

Câu 2: Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép như sau: Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là 0,5% một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

- a) Tính số tiền chi có trong ngân hàng sau 1 tháng.
b) Tính số tiền chi có trong ngân hàng sau 3 tháng.
c) Dự đoán công thức của P_n tính theo n .

Lời giải

a) Số tiền chi có trong ngân hàng sau 1 tháng là:

$$P_1 = 100 + 100 \cdot 0,5\% + 6 = 100,5 + 6 \text{ (triệu đồng)}.$$

b) Số tiền chi có trong ngân hàng sau 2 tháng là:

$$P_2 = 100,5 + 6 + (100,5 + 6) \cdot 0,5\% + 6 = (100,5 + 6)(1 + 0,5\%) + 6 = 100,5(1 + 0,5\%) + 6 \cdot (1 + 0,5\%) + 6 \text{ (triệu đồng)}$$

Số tiền chi có trong ngân hàng sau 3 tháng là:

$$\begin{aligned} P_3 &= (100,5 + 6)(1 + 0,5\%) + 6 + [(100,5 + 6)(1 + 0,5\%) + 6] \cdot 0,5\% + 6 \\ &= 100,5 \cdot (1 + 0,5\%)^2 + 6(1 + 0,5\%)^2 + 6 \cdot (1 + 0,5\%) + 6 \text{ (triệu đồng)}. \end{aligned}$$

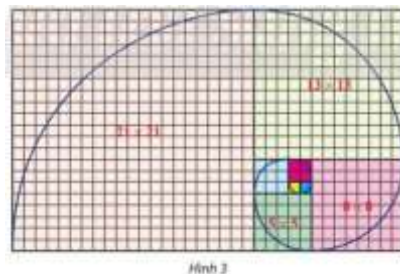
c) Số tiền chi có trong ngân hàng sau 4 tháng là:

$$\begin{aligned} P_4 &= (100,5 + 6)(1 + 0,5\%)^2 + 6 \cdot (1 + 0,5\%) + 6 + [(100,5 + 6)(1 + 0,5\%)^2 + 6 \cdot (1 + 0,5\%) + 6]0,5\% + 6 \\ &= 100,5 \cdot (1 + 0,5\%)^3 + 6 \cdot (1 + 0,5\%)^3 + 6(1 + 0,5\%)^2 + 6 \cdot (1 + 0,5\%) + 6 \end{aligned}$$

Số tiền chi có trong ngân hàng sau n tháng là:

$$P_n = 100,5 \cdot (1 + 0,5\%)^{n-1} + 6(1 + 0,5\%)^{n-1} + 6(1 + 0,5\%)^{n-2} + 6 \cdot (1 + 0,5\%)^{n-3} + \dots + 6 \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Câu 3: Trên lưới ô vuông, mỗi ô cạnh 1 đơn vị, người ta vẽ 8 hình vuông và tô màu khác nhau như Hình 3. Tìm dãy số biểu diễn độ dài cạnh của 8 hình vuông đó từ nhỏ đến lớn. Có nhận xét gì về dãy số trên?



Lời giải

$$u_1 = 1; u_2 = 1; u_3 = 2; u_4 = 3; u_5 = 5; u_6 = 8; u_7 = 13; u_8 = 21.$$

$$\text{Ta có dãy số: } (u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \end{cases}$$

Câu 4: Ông An gửi tiết kiệm 100 triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6% một năm theo hình thức tính lãi kép. Số tiền (triệu đồng) của ông An thu được sau n tháng được cho bởi công thức

$$A_n = 100 \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^n.$$

- a) Tìm số tiền ông An nhận được sau tháng thứ nhất, sau tháng thứ hai.
b) Tìm số tiền ông An nhận được sau 1 năm.

Lời giải

a) Số tiền ông An nhận được sau 1 tháng: $A_1 = 100 \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^1 = 100,5$ (triệu đồng)

Số tiền ông An nhận được sau 2 tháng: $A_2 = 100 \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^2 = 101,0025$ (triệu đồng)

b) Số tiền ông An nhận được sau 1 năm: $A_{12} = 100 \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^{12} = 106,1678$ (triệu đồng)

Câu 5: Chị Hương vay trả góp một khoản tiền 100 triệu đồng và đồng ý trả dần 2 triệu đồng mỗi tháng với lãi suất 0,8% số tiền còn lại của mỗi tháng.

Gọi A_n ($n \in \mathbb{N}$) là số tiền còn nợ (triệu đồng) của chị Hương sau n tháng.

a) Tìm lần lượt $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ để tính số tiền còn nợ của chị Hương sau 6 tháng.

b) Dự đoán hệ thức truy hồi đối với dãy số (A_n) .

Lời giải

a) Ta có:

$$A_0 = 100$$

$$A_1 = 100 + 100 \times 0,008 - 2 = 98,8$$

$$A_2 = 98,8 + 98,8 \times 0,008 - 2 = 97,59$$

$$A_3 = 97,59 + 97,59 \times 0,008 - 2 = 96,37$$

$$A_4 = 96,37 + 96,37 \times 0,008 - 2 = 95,14$$

$$A_5 = 95,14 + 95,14 \times 0,008 - 2 = 93,90$$

$$A_6 = 93,90 + 93,90 \times 0,008 - 2 = 92,65$$

Vậy sau 6 tháng số tiền chị Hương còn nợ là 92,65 triệu đồng.

b) Hệ thức truy hồi: $A_n = A_{n-1} + A_{n-1} \times 0,008 - 2 = 1,008A_{n-1} - 2$ (triệu đồng)

Câu 6: Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo hình thức lãi kép như sau: Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là 0,5% một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

a) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng.

b) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng.

c) Dự đoán công thức của P_n .

Lời giải

a) Số tiền cả gốc và lãi chị Mai có được sau 1 tháng (khi chưa gửi thêm 6 triệu đồng) là:
 $100 + 100 \cdot \frac{0,5}{100} = 100 \cdot 1,005 = 100,5$ (triệu đồng).

Số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng là: $100,5 + 6 = 106,5$ (triệu đồng).

b) Số tiền chị Mai có trong ngân hàng sau 2 tháng là:

$$106,5 \cdot 1,005 + 6 = 113,0325 \text{ (triệu đồng).}$$

Số tiền chị Mai có trong ngân hàng sau 3 tháng là:

$$113,0325 \cdot 1,005 + 6 = 119,5976625 \text{ (triệu đồng)}.$$

c) Ta có: $P_1 = 100 \cdot 1,005 + 6$;

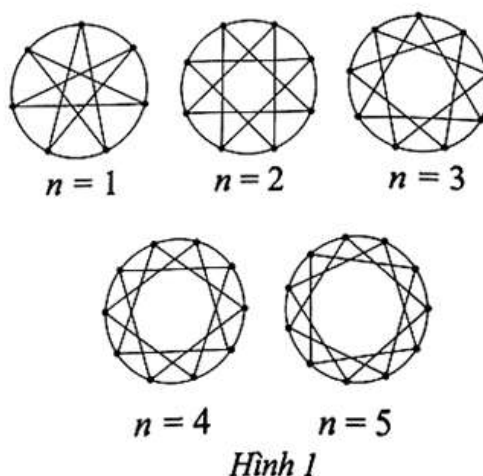
$$P_2 = P_1 \cdot 1,005 + 6 = (100 \cdot 1,005 + 6) \cdot 1,005 + 6 = 100 \cdot 1,005^2 + 6 \cdot 1,005 + 6;$$

$$P_3 = P_2 \cdot 1,005 + 6 = (100 \cdot 1,005^2 + 6 \cdot 1,005 + 6) \cdot 1,005 + 6 = 100 \cdot 1,005^3 + 6 \cdot 1,005^2 + 6 \cdot 1,005 + 6; \dots;$$

Cứ như thế, ta dự đoán được công thức của P_n :

$$P_n = 100 \cdot 1,005^n + 6 \cdot 1,005^{n-1} + 6 \cdot 1,005^{n-2} + \dots + 6 = 100 \cdot 1,005^n + 6 \cdot (1,005^{n-1} + 1,005^{n-2} + \dots + 1).$$

Câu 7: Với mỗi số nguyên dương n , lấy $n+6$ điểm cách đều nhau trên đường tròn. Nối mỗi điểm với điểm cách nó hai điểm trên đường tròn đó để tạo thành các ngôi sao như Hình 1. Gọi u_n là số đo góc ở đỉnh tính theo đơn vị độ của mỗi ngôi sao thì ta được dãy số (u_n) . Tìm công thức của số hạng tổng quát u_n .



Hình 1

Lời giải

Ta thấy đường tròn được chia thành $n+6$ cung bằng nhau và mỗi cung có số đo bằng $\left(\frac{360}{n+6}\right)^\circ$.

Do mỗi điểm được nối với điểm cách nó hai điểm trên đường tròn nên góc ở đỉnh của mỗi ngôi sao là góc nội tiếp chắn $n+6-2 \cdot 3 = n$ cung bằng nhau đó. Suy ra số đo góc ở đỉnh tính theo đơn vị độ của mỗi ngôi sao là $u_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{360}{n+6} \cdot n = \frac{180n}{n+6}$.

Câu 8: Bác Hưng để 10 triệu đồng trong tài khoản ngân hàng. Vào cuối mỗi năm, ngân hàng trả lãi 3% vào tài khoản của bác ấy, nhưng sau đó sẽ tính phí duy trì tài khoản hằng năm là 120 nghìn đồng.

a) Gọi A_0 là số tiền bác Hưng đã gửi. Viết công thức tính lần lượt A_1, A_2, A_3 . Từ đó dự đoán hệ thức truy hồi cho số dư A_n (tính theo đơn vị đồng) trong tài khoản của bác Hưng vào cuối năm thứ n .

b) Tìm số dư trong tài khoản của bác Hưng sau 4 năm.

Lời giải

a) Vào cuối năm thứ nhất, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_1 = A_0(1+3\%) - 120000 = 1,03A_0 - 120000 \text{ (đồng)}$$

Vào cuối năm thứ hai, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_2 = A_1(1+3\%) - 120000 = 1,03A_1 - 120000 \text{ (đồng)}$$

Vào cuối năm thứ ba, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_3 = A_2(1+3\%) - 120000 = 1,03A_2 - 120000 \text{ (đồng)}$$

Tương tự, vào cuối năm thứ $n (n \geq 1)$, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_n = A_{n-1}(1+3\%) - 120000 = 1,03A_{n-1} - 120000 \text{ (đồng)}$$

b) Ta tính lần lượt A_1, A_2, A_3, A_4 :

$$A_1 = 10180000; \quad A_2 = 10365400;$$

$$A_3 = 10556362; \quad A_4 = 10753053.$$

Như vậy, số dư trong tài khoản của bác Hưng sau 4 năm là 10753053 đồng.

Câu 9: Giá của một chiếc máy photocopy lúc mới mua là 50 triệu đồng. Biết rằng giá trị của nó sau mỗi năm sử dụng chỉ còn 75% giá trị trong năm liền trước đó. Tính giá trị còn lại của chiếc máy photocopy đó sau mỗi năm, trong khoảng thời gian 5 năm kể từ khi mua.

Lời giải

Giá trị của máy photocopy sau 1 năm sử dụng là $T_1 = 50 \cdot 75\% = 37,5$ (triệu đồng)

Giá trị của máy photocopy sau 2 năm sử dụng là $T_2 = T_1 \cdot 75\% = 28,125$ (triệu đồng)

Giá trị của máy photocopy sau 3 năm sử dụng là $T_3 = T_2 \cdot 75\% = 21,0938$ (triệu đồng)

Giá trị của máy photocopy sau 4 năm sử dụng là $T_4 = T_3 \cdot 75\% = 15,8203$ (triệu đồng)

Giá trị của máy photocopy sau 5 năm sử dụng là $T_5 = T_4 \cdot 75\% = 11,8652$ (triệu đồng)

Chú ý. Tổng quát, giá trị của máy photocopy sau n năm sử dụng là $T_n = T_1 \cdot (0,75)^{n-1}$ (triệu đồng)

Câu 10: Nếu tỉ lệ lạm phát là 3,5% mỗi năm và giá trung bình của một căn hộ chung cư mới tại thời điểm hiện tại là 2,5 tỉ đồng thì giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau n năm nữa được cho bởi công thức $A_n = 2,5 \cdot (1,035)^n$ (tỉ đồng)

Lời giải

Giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau 5 năm là

$$A_5 = 2,5 \cdot (1,035)^5 = 2,9692 \text{ (tỉ đồng)}$$

Tìm giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau 5 năm nữa.

Câu 11: Bác An gửi tiết kiệm 200 triệu đồng kì hạn 3 tháng, với lãi suất 3% một năm. Số tiền (triệu đồng) cả vốn lẫn lãi mà bác An nhận được sau n quý (mỗi quý là 3 tháng) sẽ là

$$A_n = 200 \left(1 + \frac{0,03}{4} \right)^n, n = 0, 1, 2, \dots$$

a) Viết ba số hạng đầu của dãy số.

b) Tìm số tiền bác An nhận được sau 2 năm.

Lời giải

a) Ba số hạng đầu của dãy số là $A_1 = 201,5; A_2 = 203,0113; A_3 = 204,5338$.

b) Chú ý rằng 2 năm bằng 8 quý, tức là $n = 8$. Do đó, sau 2 năm số tiền bác An nhận được là $A_8 = 212,3198$ triệu đồng.

Câu 12: Vi khuẩn E. Coli sinh sản thông qua một quá trình gọi là quá trình phân đôi. Vi khuẩn E. Coli phân chia làm đôi cứ sau 20 phút. Giả sử tốc độ phân chia này được duy trì trong 12 giờ kể từ khi vi khuẩn ban đầu xâm nhập vào cơ thể. Hỏi sau 12 giờ sẽ có bao nhiêu vi khuẩn E. Coli trong cơ thể? Giả sử có một nguồn dinh dưỡng vô hạn để vi khuẩn E. Coli duy trì tốc độ phân chia như cũ trong 48 giờ kể từ khi vi khuẩn ban đầu xâm nhập vào cơ thể. Hỏi sau 48 giờ sẽ có bao nhiêu vi khuẩn E. Coli trong cơ thể?

Lời giải

Giả sử ban đầu có 1 vi khuẩn E. Coli.

Sau 20 phút lần một, số vi khuẩn là $1 \cdot 2 = 2$.

Sau 20 phút lần hai, số vi khuẩn là $2 \cdot 2 = 2^2$.

Sau 20 phút lần ba, số vi khuẩn là $2^2 \cdot 2 = 2^3$.

Sau 20 phút lần bốn, số vi khuẩn là $2^3 \cdot 2 = 2^4$.

Tương tự như vậy sau 12 giờ (bằng $3 \cdot 12$ lần 20 phút) thì số vi khuẩn là

$$2^{3 \cdot 12} = 2^{36} \approx 6,87 \cdot 10^{10} \text{ (con)}$$

Sau 48 giờ (bằng $3 \cdot 48 = 144$ lần 20 phút) thì số vi khuẩn là:

$$2^{144} \approx 2,23 \cdot 10^{43} \text{ (con)}.$$

Câu 13: Một công ty dược phẩm đang thử nghiệm một loại thuốc mới. Một thí nghiệm bắt đầu với $1,0 \times 10^9$ vi khuẩn. Một liều thuốc được sử dụng sau mỗi bốn giờ có thể tiêu diệt $4,0 \times 10^8$ vi khuẩn. Giữa các liều thuốc, số lượng vi khuẩn tăng lên 25%.

a) Viết hệ thức truy hồi cho số lượng vi khuẩn sống trước mỗi lần sử dụng thuốc.

b) Tìm số vi khuẩn còn sống trước lần sử dụng thuốc thứ năm.

Lời giải

a) Gọi $u_0 = 1,0 \cdot 10^9$ là số vi khuẩn tại thời điểm ban đầu và u_n là số vi khuẩn trước lần dùng thuốc thứ n .

Do mỗi liều thuốc được sử dụng sau bốn giờ có thể tiêu diệt $4,0 \cdot 10^8$ vi khuẩn và giữa các liều thuốc, số lượng vi khuẩn tăng lên 25% nên ta có

$$u_{n+1} = (u_n - 4,0 \cdot 10^8) + 25\% \cdot u_n = 1,25u_n - 4,0 \cdot 10^8.$$

b) Ta tính u_5 như sau:

$$u_1 = 1,0 \cdot 10^9;$$

$$u_2 = 1,25u_1 - 4,0 \cdot 10^8 = 8,5 \cdot 10^8;$$

$$u_3 = 1,25u_2 - 4,0 \cdot 10^8 = 6,625 \cdot 10^8;$$

$$u_4 = 1,25u_3 - 4,0 \cdot 10^8 = 4,28125 \cdot 10^8;$$

$$u_5 = 1,25u_4 - 4,0 \cdot 10^8 = 1,3515625 \cdot 10^8.$$

Vậy số vi khuẩn còn sống trước lần sử dụng thuốc thứ năm là 135156250 con.

CẤP SỐ CỘNG

Câu 1. Chiều cao (đơn vị: centimét) của một đứa trẻ n tuổi phát triển bình thường được cho bởi công thức:

$$x_n = 75 + 5(n-1).$$

(Nguồn: <https://bibabo.vn>)

- a) Một đứa trẻ phát triển bình thường có chiều cao năm 3 tuổi là bao nhiêu centimét?
- b) Dãy số (x_n) có là một cấp số cộng không? Trung bình một năm, chiều cao mỗi đứa trẻ phát triển bình thường tăng lên bao nhiêu centimét?

Lời giải

- a) Chiều cao 3 năm tuổi của một đứa bé phát triển bình thường là:

$$x_3 = 75 + 5(3-1) = 85 \text{ (cm)}$$

- b) Ta có: $x_{n+1} = 75 + 5(n+1-1) = 75 + 5n$

$$\text{Xét hiệu } x_{n+1} - x_n = 75 + 5n - [75 + 5(n-1)] = 5$$

Do đó (x_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu $x_1 = 75$ và công sai $d = 5$

Câu 2. Khi kí kết hợp đồng lao động với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau:

Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu.

Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu.

Nếu là người được tuyển dụng vào doanh nghiệp trên, em sẽ chọn phương án nào khi:

- a) Kí hợp đồng lao động 3 năm?
- b) Kí hợp đồng lao động 10 năm?

Lời giải

+) Theo phương án 1: Gọi (u_n) là dãy số tiền lương của người lao động theo phương án 1 qua mỗi năm.

Dãy số u_n lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 120$ và công sai $d = 18$.

Khi đó số hạng tổng quát của cấp số nhân là: $u_n = 120 + (n-1) \cdot 18$.

+) Theo phương án 2: Gọi (v_n) là dãy số tiền lương của người lao động theo phương án 2 qua từng quý.

Dãy số (v_n) lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $v_1 = 24$ và công sai $d = 1,8$.

Khi đó số hạng tổng quát của cấp số nhân là $v_n = 24 + (n-1)1,8$.

- a) Khi kí hợp đồng 3 năm tương đương với 12 quý ta có:

+) Theo phương án 1: $u_3 = 120 + (3-1) \cdot 18 = 156$ (triệu đồng)

Tổng số tiền lương nhận được sau 3 năm là:

$$S_3 = \frac{3 \cdot (120 + 156)}{2} = 414 \text{ (triệu đồng)}.$$

+) Theo phương án 2: $u_{12} = 24 + (12 - 1) \cdot 1,8 = 43,8$.

Tổng số tiền lương nhận được sau 3 năm tương ứng với 12 quý là:

$$S_{12} = \frac{12 \cdot (24 + 43,8)}{2} = 406,8 \text{ (triệu đồng)}.$$

Vậy nếu được tuyển dụng vào doanh nghiệp và kí hợp đồng lao động 3 năm thì nên theo phương án 1.

b) Khi kí hợp đồng 10 năm tương đương với 40 quý ta có:

+) Theo phương án 1: $u_{10} = 120 + (10 - 1) \cdot 18 = 282 \text{ (triệu đồng)}$

Tổng số tiền lương nhận được sau 10 năm là: $S_{10} = \frac{10 \cdot (120 + 282)}{2} = 2010 \text{ (triệu đồng)}.$

+) Theo phương án 2: $u_{40} = 24 + (40 - 1) \cdot 1,8 = 94,2 \text{ (triệu đồng)}.$

Tổng số tiền lương nhận được sau 10 năm tương ứng với 40 quý là: $S_{12} = \frac{40 \cdot (24 + 94,2)}{2} = 2364 \text{ (triệu đồng)}.$

Vậy nếu được tuyển dụng vào doanh nghiệp và kí hợp đồng lao động 10 năm thì nên theo phương án 2.

Câu 3. Một người muốn mua một thanh gỗ đủ để cắt ra làm các thanh ngang của một cái thang. Biết rằng chiều dài các thanh ngang của cái thang đó (từ bậc dưới cùng) lần lượt là 45 cm, 43 cm, 41 cm, ..., 31 cm.



a) Cái thang đó có bao nhiêu bậc?

b) Tính chiều dài thanh gỗ mà người đó cần mua, giả sử chiều dài các mối nối (phần gỗ bị cắt thành mùn cưa) là không đáng kể.

Lời giải

a) Chiều dài các thanh ngang là dãy cấp số cộng có số hạng đầu là 45, công sai là -

$$u_n = 45 - 2(n - 1) = 47 - 2n$$

Khi $u_n = 31 \Leftrightarrow n = 8$

Vậy cái thang có 8 bậc.

b) $S_8 = \frac{8 \cdot (45 + 31)}{2} = 304.$

Vậy chiều dài thanh gỗ là 304 cm.

Câu 4. Khi một vận động viên nhảy dù nhảy ra khỏi máy bay, giả sử quãng đường người ấy rơi tự do (tính theo feet) trong mỗi giây liên tiếp theo thứ tự trước khi bung dù lần lượt là: 16;48;80;112;144;... (các quãng đường này tạo thành cấp số cộng).



Hình 6

- a) Tính công sai của cấp số cộng trên.
- b) Tính tổng chiều dài quãng đường rơi tự do của người đó trong 10 giây đầu tiên.

Lời giải

a) Công sai của cấp số cộng trên là: $d = 32$.

$$b) S_{10} = \frac{10 \cdot [2 \cdot 16 + (10-1) \cdot 32]}{2} = 1600.$$

Vậy tổng chiều dài quãng đường rơi tự do của người đó trong 10 giây đầu tiên là 1600 feet.

Câu 5. Ở một loài thực vật lưỡng bội, tính trạng chiều cao cây do hai gene không alen là A và B cùng quy định theo kiểu tương tác cộng gộp. Trong kiểu gene nếu cứ thêm một alen trội A hay B thì chiều cao cây tăng thêm 5 cm. Khi trưởng thành, cây thấp nhất của loài này với kiểu gene aabb có chiều cao 100 cm. Hỏi cây cao nhất với kiểu gene AABB có chiều cao bao nhiêu?

Lời giải

Cây với kiểu gene AABB có chiều cao là: $100 + 5 \cdot 4 = 120$ (cm)

Câu 6. Giá của một chiếc xe ô tô lúc mới mua là 680 triệu đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá của chiếc xe ô tô giảm 55 triệu đồng. Tính giá còn lại của chiếc xe sau 5 năm sử dụng.

Lời giải

Giá của chiếc xe sau n năm là: $u_n = 680 - 55(n-1)$

Vậy sau 5 năm sử dụng giá của chiếc xe là: $u_5 = 680 - 55(5-1) = 460$ (triệu đồng)

Câu 7. Một kiến trúc sư thiết kế một hội trường với 15 ghế ngồi ở hàng thứ nhất, 18 ghế ngồi ở hàng thứ hai, 21 ghế ngồi ở hàng thứ ba, và cứ như vậy (số ghế ở hàng sau nhiều hơn 3 ghế so với số ghế ở hàng liền trước nó). Nếu muốn hội trường đó có sức chứa ít nhất 870 ghế ngồi thì kiến trúc sư đó phải thiết kế tối thiểu bao nhiêu hàng ghế?

Lời giải

Số ghế ở mỗi hàng lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 15$ và công sai $d = 3$. Gọi n là số các số hạng đầu của cấp số cộng cần lấy tổng, ta có:

$$870 = S_n = \frac{n}{2} [2 \times 15 + (n-1) \times 3] = \frac{n}{2} (27 + 3n)$$

Do đó $27n + 3n^2 - 1740 = 0$, suy ra $n = 20, n = -29$ (loại)

Vậy cần phải thiết kế 20 hàng ghế

Câu 8. Vào năm 2020, dân số của một thành phố là khoảng 1,2 triệu người. Giả sử mỗi năm, dân số của thành phố này tăng thêm khoảng 30 nghìn người. Hãy ước tính dân số của thành phố này vào năm 2030.

Lời giải

Dân số mỗi năm của thành phố lập thành cấp số cộng có $u_1 = 1200$, công sai $d = 30$

Dân số mỗi năm có dạng tổng quát là: $u_n = 1200 + 30(n - 1)$

Dân số của năm 2030 tức $n = 11$ $u_{11} = 1200 + 30(11 - 1) = 1500$ (nghìn người)

Câu 9. Một ruộng bậc thang có thửa thấp nhất (bậc thứ nhất) nằm ở độ cao 950 m so với mực nước biển, độ chênh lệch giữa thửa trên và thửa dưới trung bình là 1,5 m. Hỏi thửa ruộng ở bậc thứ 12 có độ cao là bao nhiêu mét so với mực nước biển?



Hình 1

Lời giải

Kí hiệu u_n là chiều cao so với mực nước biển của thửa ruộng ở bậc thứ n .

Khi đó, dãy số (u_n) là một cấp số cộng với $u_1 = 950$ và $d = 1,5$.

Ta có: $u_{12} = u_1 + 11d = 950 + 11 \cdot 1,5 = 966,5$

Vậy thửa ruộng ở bậc thứ 12 có độ cao 966,5 m so với mực nước biển.

Câu 10. Bác Tư vào làm cho một công ty với hợp đồng về tiền lương mỗi năm như sau:

Năm thứ nhất: 240 triệu;

Từ năm thứ hai trở đi: Mỗi năm tăng thêm 12 triệu.

Tính số tiền lương một năm của bác Tư vào năm thứ 11.

Lời giải

Gọi u_n là số tiền lương của bác Tư nhận được vào năm thứ n .

Khi đó, dãy số (u_n) tạo thành cấp số cộng với $u_1 = 240$ và $d = 12$.

Ta có $u_{11} = u_1 + 10d = 240 + 10 \cdot 12 = 360$

Vậy vào năm thứ 11, số tiền lương một năm của bác Tư là 360 triệu đồng.

Câu 11. Một rạp hát có 20 hàng ghế. Hàng thứ nhất có 20 ghế, số ghế ở các hàng sau đều hơn số ghế ngay trước đó một ghế. Cho biết rạp hát đã bán hết vé với giá mỗi vé là 60 nghìn đồng. Tính tổng số tiền vé thu được của rạp hát.

Lời giải

Gọi u_n là số ghế ở hàng thứ n .

Khi đó, dãy số (u_n) tạo thành cấp số cộng với $u_1 = 20$ và $d = 1$.

$$\text{Tổng số ghế có trong rạp hát là: } S_{20} = \frac{20 \cdot [2 \cdot 20 + (20 - 1) \cdot 1]}{2} = 590 \text{ (ghế)}$$

Tổng số tiền vé thu được là: $590 \cdot 60\,000 = 35\,400\,000$ (đồng).

Câu 12. Khi kí kết hợp đồng lao động với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau:

Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu đồng. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu đồng.

Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu đồng. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu đồng.

Nếu là người được tuyển dụng vào doanh nghiệp trên, em nên chọn phương án nào khi:

- a) Kí hợp đồng lao động 3 năm?
- b) Kí hợp đồng lao động 10 năm?

Lời giải

Ở phương án trả lương thứ nhất, số tiền lương mỗi năm người lao động nhận được lập thành cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 120$, công sai $d = 18$.

Ở phương án trả lương thứ hai, số tiền lương mỗi quý người lao động nhận được lập thành cấp số cộng (v_n) có số hạng đầu $v_1 = 24$, công sai $d' = 1,8$.

- a) Nếu kí hợp đồng lao động 3 năm thì:

Tổng số tiền lương người lao động nhận được trong 3 năm ở phương án 1 là tổng 3 số hạng đầu của cấp số cộng và bằng:

$$S_3 = \frac{(2u_1 + 2d) \cdot 3}{2} = 3u_1 + 3d = 3 \cdot 120 + 3 \cdot 18 = 414 \text{ (triệu đồng)}$$

Do 1 năm có 4 quý nên tổng số tiền lương người lao động nhận được trong 3 năm ở phương án 2 là tổng 12 số hạng đầu của cấp số cộng và bằng:

$$S'_{12} = \frac{(2v_1 + 11d') \cdot 12}{2} = 12v_1 + 66d' = 12 \cdot 24 + 66 \cdot 1,8 = 406,8 \text{ (triệu đồng)}$$

Vậy nếu kí hợp đồng lao động 3 năm thì em nên chọn phương án 1.

- b) Nếu kí hợp đồng lao động 10 năm thì:

Tổng số tiền lương người lao động nhận được trong 10 năm ở phương án 1 bằng:

$$S_{10} = \frac{(2u_1 + 9d) \cdot 10}{2} = 10u_1 + 45d = 10 \cdot 120 + 45 \cdot 18 = 2010 \text{ (triệu đồng)}$$

Tổng số tiền lương người lao động nhận được trong 10 năm ở phương án 2 bằng:

$$S'_{40} = \frac{(2v_1 + 39d') \cdot 40}{2} = 40v_1 + 780d' = 40 \cdot 24 + 780 \cdot 1,8 = 2364 \text{ (triệu đồng)}$$

Vậy nếu kí hợp đồng lao động 10 năm thì em nên chọn phương án 2.

Câu 13. Chuông đồng hồ ở một toà tháp đánh số tiếng đúng bằng số giờ và cứ mỗi 30 phút không phải là giờ đúng thì đánh 1 tiếng chuông. Hỏi bắt đầu từ lúc 1 giờ đêm đến 12 giờ trưa, chuông đồng hồ đó đã đánh tất cả bao nhiêu tiếng?

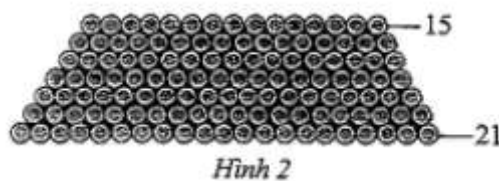
Lời giải

Lúc 1 giờ đêm, toà tháp đánh 1 tiếng chuông; lúc 2 giờ đêm, toà tháp đánh 2 tiếng chuông,..; lúc 12 giờ trưa, toà tháp đánh 12 tiếng chuông. Ngoài ra, mỗi 30 phút không phải là giờ đúng thì đánh 1 tiếng chuông (có 11 lần như thế từ 1 giờ đến 12 giờ).

Vậy tổng số tiếng chuông là:

$$S = (1 + 2 + 3 + \dots + 12) + 1 \cdot 11 = \frac{(1+12) \cdot 12}{2} + 11 = 89 \quad (\text{tiếng chuông})$$

29. Các khúc gỗ được xếp như Hình 2. Lượt thứ nhất có 21 khúc, lượt thứ hai có 20 khúc,.., lượt trên cùng có 15 khúc. Tính tổng số khúc gỗ đã được xếp.



Lời giải

Tổng số khúc gỗ được xếp là: $15 + 16 + \dots + 21 = \frac{(21+15) \cdot 7}{2} = 126.$

Câu 14. Bác Hưng để 10 triệu đồng trong tài khoản ngân hàng. Vào cuối mỗi năm, ngân hàng trả lãi 3% vào tài khoản của bác ấy, nhưng sau đó sẽ tính phí duy trì tài khoản hằng năm là 120 nghìn đồng.

a) Gọi A_0 là số tiền bác Hưng đã gửi. Viết công thức tính lần lượt A_1, A_2, A_3 . Từ đó dự đoán hệ thức truy hồi cho số dư A_n (tính theo đơn vị đồng) trong tài khoản của bác Hưng vào cuối năm thứ n .

b) Tìm số dư trong tài khoản của bác Hưng sau 4 năm.

Lời giải

a) Vào cuối năm thứ nhất, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_1 = A_0(1 + 3\%) - 120000 = 1,03A_0 - 120000 \quad (\text{đồng})$$

Vào cuối năm thứ hai, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_2 = A_1(1 + 3\%) - 120000 = 1,03A_1 - 120000 \quad (\text{đồng})$$

Vào cuối năm thứ ba, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_3 = A_2(1 + 3\%) - 120000 = 1,03A_2 - 120000 \quad (\text{đồng})$$

Tương tự, vào cuối năm thứ $n (n \geq 1)$, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_n = A_{n-1}(1 + 3\%) - 120000 = 1,03A_{n-1} - 120000 \quad (\text{đồng})$$

b) Ta tính lần lượt A_1, A_2, A_3, A_4 :

$$A_1 = 10180000; \quad A_2 = 10365400;$$

$$A_3 = 10556362; \quad A_4 = 10753053.$$

Như vậy, số dư trong tài khoản của bác Hưng sau 4 năm là 10753053 đồng.

Câu 15. Giá của một chiếc máy photocopy lúc mới mua là 50 triệu đồng. Biết rằng giá trị của nó sau mỗi năm sử dụng chỉ còn 75% giá trị trong năm liền trước đó. Tính giá trị còn lại của chiếc máy photocopy đó sau mỗi năm, trong khoảng thời gian 5 năm kể từ khi mua.

Lời giải

Giá trị của máy photocopy sau 1 năm sử dụng là $T_1 = 50 \cdot 75\% = 37,5$ (triệu đồng)

Giá trị của máy photocopy sau 2 năm sử dụng là $T_2 = T_1 \cdot 75\% = 28,125$ (triệu đồng)

Giá trị của máy photocopy sau 3 năm sử dụng là $T_3 = T_2 \cdot 75\% = 21,0938$ (triệu đồng)

Giá trị của máy photocopy sau 4 năm sử dụng là $T_4 = T_3 \cdot 75\% = 15,8203$ (triệu đồng)

Giá trị của máy photocopy sau 5 năm sử dụng là $T_5 = T_4 \cdot 75\% = 11,8652$ (triệu đồng)

Chú ý. Tổng quát, giá trị của máy photocopy sau n năm sử dụng là $T_n = T_1 \cdot (0,75)^{n-1}$ (triệu đồng)

Câu 16. Nếu tỉ lệ lạm phát là 3,5% mỗi năm và giá trung bình của một căn hộ chung cư mới tại thời điểm hiện tại là 2,5 tỉ đồng thì giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau n năm nữa được cho bởi công thức $A_n = 2,5 \cdot (1,035)^n$ (tỉ đồng)

Lời giải

Giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau 5 năm là

$$A_5 = 2,5 \cdot (1,035)^5 = 2,9692 \text{ (tỉ đồng)}$$

Tìm giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau 5 năm nữa.

Câu 17. Bác An gửi tiết kiệm 200 triệu đồng kì hạn 3 tháng, với lãi suất 3% một năm. Số tiền (triệu đồng) cả vốn lẫn lãi mà bác An nhận được sau n quý (mỗi quý là 3 tháng) sẽ là

$$A_n = 200 \left(1 + \frac{0,03}{4} \right)^n, n = 0, 1, 2, \dots$$

a) Viết ba số hạng đầu của dãy số.

b) Tìm số tiền bác An nhận được sau 2 năm.

Lời giải

a) Ba số hạng đầu của dãy số là $A_1 = 201,5; A_2 = 203,0113; A_3 = 204,5338$.

b) Chú ý rằng 2 năm bằng 8 quý, tức là $n = 8$. Do đó, sau 2 năm số tiền bác An nhận được là $A_8 = 212,3198$ triệu đồng.

Câu 18. Vi khuẩn E. Coli sinh sản thông qua một quá trình gọi là quá trình phân đôi. Vi khuẩn E. Coli phân chia làm đôi cứ sau 20 phút. Giả sử tốc độ phân chia này được duy trì trong 12 giờ kể từ khi vi khuẩn ban đầu xâm nhập vào cơ thể. Hỏi sau 12 giờ sẽ có bao nhiêu vi khuẩn E. Coli trong cơ thể? Giả sử có một nguồn dinh dưỡng vô hạn để vi khuẩn E. Coli duy trì tốc độ phân chia như cũ trong 48 giờ kể từ khi vi khuẩn ban đầu xâm nhập vào cơ thể. Hỏi sau 48 giờ sẽ có bao nhiêu vi khuẩn E. Coli trong cơ thể?

Lời giải

Giả sử ban đầu có 1 vi khuẩn E. Coli.

Sau 20 phút lần một, số vi khuẩn là $1 \cdot 2 = 2$.

Sau 20 phút lần hai, số vi khuẩn là $2 \cdot 2 = 2^2$.

Sau 20 phút lần ba, số vi khuẩn là $2^2 \cdot 2 = 2^3$.

Sau 20 phút lần bốn, số vi khuẩn là $2^3 \cdot 2 = 2^4$.

Tương tự như vậy sau 12 giờ (bằng $3 \cdot 12$ lần 20 phút) thì số vi khuẩn là

$$2^{3 \cdot 12} = 2^{36} \approx 6,87 \cdot 10^{10} \text{ (con)}$$

Sau 48 giờ (bằng $3 \cdot 48 = 144$ lần 20 phút) thì số vi khuẩn là:

$$2^{144} \approx 2,23 \cdot 10^{43} \text{ (con)}.$$

Câu 19. Một công ty dược phẩm đang thử nghiệm một loại thuốc mới. Một thí nghiệm bắt đầu với $1,0 \times 10^9$ vi khuẩn. Một liều thuốc được sử dụng sau mỗi bốn giờ có thể tiêu diệt $4,0 \times 10^8$ vi khuẩn. Giữa các liều thuốc, số lượng vi khuẩn tăng lên 25%.

a) Viết hệ thức truy hồi cho số lượng vi khuẩn sống trước mỗi lần sử dụng thuốc.

b) Tìm số vi khuẩn còn sống trước lần sử dụng thuốc thứ năm.

Lời giải

a) Gọi $u_0 = 1,0 \cdot 10^9$ là số vi khuẩn tại thời điểm ban đầu và u_n là số vi khuẩn trước lần dùng thuốc thứ n .

Do mỗi liều thuốc được sử dụng sau bốn giờ có thể tiêu diệt $4,0 \cdot 10^8$ vi khuẩn và giữa các liều thuốc, số lượng vi khuẩn tăng lên 25% nên ta có

$$u_{n+1} = (u_n - 4,0 \cdot 10^8) + 25\% \cdot u_n = 1,25u_n - 4,0 \cdot 10^8.$$

b) Ta tính u_5 như sau:

$$u_1 = 1,0 \cdot 10^9;$$

$$u_2 = 1,25u_1 - 4,0 \cdot 10^8 = 8,5 \cdot 10^8;$$

$$u_3 = 1,25u_2 - 4,0 \cdot 10^8 = 6,625 \cdot 10^8;$$

$$u_4 = 1,25u_3 - 4,0 \cdot 10^8 = 4,28125 \cdot 10^8;$$

$$u_5 = 1,25u_4 - 4,0 \cdot 10^8 = 1,3515625 \cdot 10^8.$$

Vậy số vi khuẩn còn sống trước lần sử dụng thuốc thứ năm là 135156250 con.

Câu 20. Một hội trường lớn có 35 ghế ở hàng đầu tiên, 37 ghế ở hàng thứ hai, 39 ghế ở hàng thứ ba và cứ tiếp tục theo quy luật như vậy. Có tất cả 27 hàng ghế. Hỏi hội trường đó có bao nhiêu ghế?

Lời giải

Gọi u_n là số ghế ở hàng thứ n . Vì hội trường lớn có 35 ghế ở hàng đầu tiên, 37 ghế ở hàng thứ hai, 39 ghế ở hàng thứ ba, nên dãy số (u_n) lập thành cấp số cộng có $u_1 = 35$ và công sai $d = 2$.

Suy ra tổng số ghế của hội trường với 27 hàng ghế là

$$S_{27} = \frac{(2u_1 + 26d) \cdot 27}{2} = 1647 \text{ (ghế)}$$

Câu 21. Phải lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của một cấp số cộng có số hạng đầu là 78 và công sai là -4 để được tổng là 702?

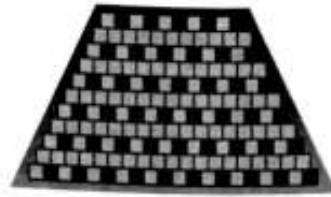
Lời giải

Áp dụng công thức tính tổng của n số hạng đầu của cấp số cộng ta có

$$702 = S_n = \frac{n}{2} [2 \cdot 78 + (n-1)(-4)].$$

Suy ra $n = 13$, tức là ta cần lấy 13 số hạng đầu.

Câu 22. Một bức tường trang trí có dạng hình thang, rộng 2,4 m ở đáy và rộng 1,2 m ở đỉnh (hình vẽ bên). Các viên gạch hình vuông có kích thước $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ phải được đặt sao cho mỗi hàng ở phía trên chứa ít hơn một viên so với hàng ở ngay phía dưới nó. Hỏi sẽ cần bao nhiêu viên gạch hình vuông như vậy để ốp hết bức tường đó?



Lời giải

Đổi $2,4 \text{ m} = 240 \text{ cm}$; $1,2 \text{ m} = 120 \text{ cm}$.

Số viên gạch ở hàng đầu tiên (ứng với đáy lớn) là $u_1 = 240 : 10 = 24$.

Số viên gạch ở hàng trên cùng (ứng với đáy nhỏ) là: $u_n = 120 : 10 = 12$.

Vì mỗi hàng ở phía trên chứa ít hơn một viên so với hàng ở ngay phía dưới nó nên ta thu được cấp số cộng có công sai $d = -1$.

Như vậy $u_n = 12 = u_1 + (n-1)(-1) \Rightarrow n = 13$.

Vậy số viên gạch hình vuông cần thiết để ốp hết bức tường đó là

$$S_{13} = \frac{(u_1 + u_{13})13}{2} = 234 \text{ (viên gạch)}$$

Câu 23. Một cầu thang bằng gạch có tổng cộng 30 bậc. Bậc dưới cùng cần 100 viên gạch. Mỗi bậc tiếp theo cần ít hơn hai viên gạch so với bậc ngay trước nó.

a) Cần bao nhiêu viên gạch cho bậc trên cùng?

b) Cần bao nhiêu viên gạch để xây cầu thang?

Lời giải

Công thức của cấp số cộng biểu thị số viên gạch cho mỗi bậc cầu thang như sau:

$$u_1 = 100, u_{n+1} = u_n + (-2), (n \geq 2).$$

a) Ta tính $u_{30} = u_1 + (30-1)(-2) = 42$.

b) Ta tính $S_{30} = u_1 + u_2 + \dots + u_{30} = \frac{30}{2} [2 \cdot 100 + (30-1)(-2)] = 2130$.

Như vậy, ta cần 2130 viên gạch để xây cầu thang.

Câu 24. Có bao nhiêu hàng ghế trong một góc khán đài của một sân vận động, biết mỗi hàng ghế sau có thêm 4 chỗ ngồi so với hàng ghế ngay trước nó?

Lời giải

Áp dụng công thức tính tổng n số hạng đầu của cấp số cộng với $S_n = 2040$, $u_1 = 10$, $d = 4$ để tìm n , ta được

$$2040 = S_n = \frac{n}{2} [2 \cdot 10 + (n-1)4].$$

Suy ra $n = 30$, tức là góc khán đài đó có 30 hàng ghế.

Câu 25. Nếu anh Nam nhận được lời mời làm việc cho một công ty nước ngoài với mức lương khởi điểm là 35000 đô la mỗi năm và được tăng thêm 1400 đô la lương mỗi năm, thì sẽ mất bao nhiêu năm làm việc để tổng lương mà anh Nam nhận được là 319200 đô la?

Lời giải

Áp dụng công thức tính tổng n số hạng đầu của cấp số cộng với

$S_n = 319200$, $u_1 = 35000$, $d = 1400$, ta có

$$319200 = S_n = \frac{n}{2} [2 \cdot 35000 + (n-1) \cdot 1400].$$

Suy ra $n = 8$.

Vậy sau 8 năm làm việc thì tổng lương mà anh Nam nhận được là 319200 đô la.

Câu 26. Người ta trồng cây theo các hàng ngang với quy luật: ở hàng thứ nhất có 1 cây, ở hàng thứ hai có 2 cây, ở hàng thứ ba có 3 cây, ... ở hàng thứ n có n cây. Biết rằng người ta trồng hết 4950 cây. Hỏi số hàng cây được trồng theo cách trên là bao nhiêu?

Lời giải

Giả sử người ta đã trồng được n hàng.

Số cây ở mỗi hàng lập thành một cấp số cộng với $u_1 = 1$, công sai $d = 1$

Tổng số cây ở n hàng cây là:

$$S_n = \frac{n(1+n)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = 4950$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 9900 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 99 & (\text{thỏa mãn}) \\ n = -100 & (\text{không thỏa mãn}) \end{cases}$$

Vậy có 99 hàng cây được trồng theo cách trên.

Câu 27. Giả sử một quần thể động vật ở thời điểm ban đầu có 110000 cá thể, quần thể này có tỉ lệ sinh là 12% năm, xuất cư là 2% /năm, tử vong là 8% / năm. Dự đoán số cá thể của quần thể đó sau hai năm.

Lời giải

Số cá thể của quần thể qua các năm tạo thành cấp số nhân có công bội là:
 $q = 1 + 0,12 - 0,02 - 0,08 = 1,02$

Số cá thể sau hai năm là: $110000 \cdot 1,02^2 = 114444$ (cá thể).

Câu 28. Từ 0 giờ đến 12 giờ trưa, chuông của một chiếc đồng hồ quả lắc sẽ đánh bao nhiêu tiếng, biết rằng nó chỉ đánh chuông báo giờ và số tiếng chuông bằng số giờ?

Lời giải

Lúc 1 giờ đồng hồ đánh 1 tiếng chuông.

Lúc 2 giờ đồng hồ đánh 2 tiếng chuông.

Lúc 12 giờ trưa đồng hồ đánh 12 tiếng chuông.

Do đó, từ 0 giờ đến 12 giờ trưa, đồng hồ đánh số tiếng chuông là:

$$1+2+3+\dots+11+12 \quad 1+2+3+\dots+11+12$$

Đây là tổng 12 số hạng của cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$, công sai $d = 1$.

Vậy tổng số tiếng chuông đồng hồ trong khoảng thời gian từ 0 giờ đến 12 giờ trưa là:

$$S_{12} = \frac{12 \cdot (1+12)}{2} = 78$$

$$S_{12} = \frac{12 \cdot (1+12)}{2} = 78$$

Câu 29. Bác Hưng quyết định tham gia một chương trình bơi lội để duy trì sức khỏe. Bác bắt đầu bằng cách bơi 10 phút vào ngày đầu tiên, sau đó thêm 2 phút mỗi ngày sau đó.

a) Tìm công thức truy hồi cho số phút T_n mà bác ấy bơi vào ngày thứ n của chương trình.

b) Tìm sáu số hạng đầu của dãy số T_n .

c) Tìm công thức tổng quát của dãy số (T_n) .

d) Bác Hưng đạt được mục tiêu bơi ít nhất 60 phút mỗi ngày vào ngày thứ bao nhiêu của chương trình?

e) Tính tổng thời gian bác Hưng bơi sau 30 ngày đầu của chương trình.

Lời giải

Gọi T_n là số phút mà bác Hưng bơi vào ngày thứ n của chương trình,

a) Do bác bắt đầu bằng cách bơi 10 phút vào ngày đầu tiên, sau đó thêm 2 phút mỗi ngày sau đó nên ta có hệ thức truy hồi sau $T_1 = 10, T_{n+1} = T_n + 2 \forall n \geq 1$.

b) Sáu số hạng đầu của dãy số là

$$T_1 = 10; T_2 = 12; T_3 = 14; T_4 = 16; T_5 = 18; T_6 = 20.$$

c) Theo định nghĩa dãy số T_n là cấp số cộng có $T_1 = 10$ và công sai $d = 2$.

Suy ra, công thức tổng quát của dãy số là

$$T_n = T_1 + (n-1)d = 8 + 2n \forall n \geq 1.$$

d) Ta có $T_n \geq 60 \Leftrightarrow 8 + 2n \geq 60 \Leftrightarrow n \geq 26$.

Vậy bác Hưng đạt được mục tiêu bơi ít nhất 60 phút mỗi ngày vào ngày thứ 26 của chương trình.

e) Tổng thời gian bác Hưng bơi trong 30 ngày đầu của chương trình là

$$S_{30} = \frac{[2T_1 + (30-1)d]30}{2} = 1170 \text{ (phút)}.$$

Câu 30. Dãy các số chính phương sau đây không phải là cấp số cộng $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, \dots$

Tuy nhiên, chúng ta có thể lập một cấp số cộng liên quan bằng cách tìm hiệu của các số hạng liên tiếp của dãy số này.

a) Viết tám số hạng đầu của cấp số cộng liên quan được mô tả ở trên. Tìm công thức của số hạng thứ n của cấp số cộng này.

b) Mô tả bằng cách nào để chúng ta có thể lập được một cấp số cộng từ dãy các số lập phương sau đây:

$1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, \dots$

c) Viết bảy số hạng đầu của cấp số cộng ở trong phần b) và tìm số hạng thứ n của nó.

Lời giải

a) Công thức số hạng thứ n của dãy các số chính phương đã cho là $n^2 \forall n \geq 1$. Tám số hạng đầu của cấp số cộng được mô tả là $3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17$. Theo giả thiết chúng ta xét hiệu của hai số hạng liên tiếp là

$$u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 \forall n \geq 1.$$

Ta chứng minh được (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = 2$.

b) Xét dãy các số lập phương, với ba số hạng liên tiếp ta lấy số đầu cộng với số thứ ba trừ đi 2 lần số thứ hai ta thu được một cấp số cộng.

c) Bảy số hạng đầu của cấp số cộng ở trong câu b là $12; 18; 24; 30; 36; 42; 48$.

Công thức tổng quát là $u_n = n^3 + (n+2)^3 - 2(n+1)^3 = 6n+6 \forall n \geq 1$.

CẤP SỐ NHÂN

Câu 1: Một tỉnh có 2 triệu dân vào năm 2020 với tỉ lệ tăng dân số là 1% / năm. Gọi u_n là số dân của tỉnh đó sau n năm. Giả sử tỉ lệ tăng dân số là không đổi.

- Viết công thức tính số dân của tỉnh đó sau n năm kể từ năm 2020.
- Tính số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020.

Lời giải

a) Ta có dãy u_n lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu là $u_0 = 2$ triệu dân và công sai $q = 1\%$. Khi đó số hạng tổng quát của $u_n = 2 \cdot (1 + 1\%)^{n-1}$ (triệu dân).

b) Số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020 là:

$$u_{10} = 2 \cdot (1 + 1\%)^{10-1} \approx 2,19 \text{ (triệu dân)}.$$

Câu 2: Một gia đình mua một chiếc ô tô giá 800 triệu đồng. Trung bình sau mỗi năm sử dụng, giá trị còn lại của ô tô giảm đi 4% (so với năm trước đó).

- Viết công thức tính giá trị của ô tô sau 1 năm, 2 năm sử dụng.
- Viết công thức tính giá trị của ô tô sau n năm sử dụng.
- Sau 10 năm, giá trị của ô tô ước tính còn bao nhiêu triệu đồng?

Lời giải

a) Sau 1 năm giá trị của ô tô còn lại là: $u_1 = 800 - 800 \cdot 4\% = 800 \cdot (1 - 4\%) = 768$ (triệu đồng).

Sau 2 năm giá trị của ô tô còn lại là: $u_2 = 800 \cdot (1 - 4\%) - 800 \cdot (1 - 4\%) \cdot 4\% = 800 \cdot (1 - 4\%)^2 = 737,28$ (triệu đồng).

b) Gọi u_n là giá trị của ô tô sau n năm sử dụng.

Dãy số u_n tạo thành một cấp số nhân với số hạng đầu là giá trị đầu của ô tô là $u_0 = 800$ triệu đồng và công bội $q = 1 - 4\%$.

Khi đó công thức tổng quát để tính $u_n = 800 \cdot (1 - 4\%)^n$.

c) Sau 10 năm sử dụng giá trị của ô tô còn lại là: $u_{10} = 800 \cdot (1 - 4\%)^{10} \approx 531,87$ (triệu đồng).

Câu 3: Một người nhảy bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây đai an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây dài 100 m. Sau mỗi lần rơi xuống, nhờ sự đàn hồi của dây, người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 75% so với lần rơi trước đó và lại bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên (Hình 3). Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần kéo lên và lại rơi xuống.



Hình 3

Lời giải

Gọi u_n là độ dài dây kéo sau n lần rơi xuống ($n \in \mathbb{N}$)

Ta có: $u_0 = 100$ (m).

Sau lần rơi đầu tiên độ dài dây kéo còn lại là: $u_1 = 100.75\%(m)$.

Sau cú nhảy tiếp theo độ dài dây kéo còn lại là: $u_2 = 100.75\%.75\% = 100 \cdot (75\%)^2$ (m).

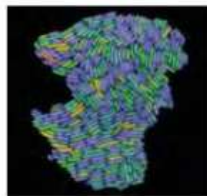
...

Dãy số này lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu là 100 và công bội $q = 0,75\%$, có công thức tổng quát $u_n = 100 \cdot (0,75\%)^{n-1}$ (m).

Tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần kéo lên và lại rơi xuống là:

$$S_{10} = \frac{100(1 - (75\%)^{10})}{1 - 75\%} \approx 377,5 \text{ (m)}.$$

Câu 4: Một loại vi khuẩn được nuôi cấy trong phòng thí nghiệm, cứ mỗi phút số lượng lại tăng lên gấp đôi số lượng đang có. Từ một vi khuẩn ban đầu, hãy tính tổng số vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 20 phút.



Hình 2

Lời giải

Tổng số vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 20 phút là:

$$S_{20} = \frac{20 \cdot [1 - 2^{20}]}{1 - 2} = 20971500.$$

Câu 5: Giả sử một thành phố có dân số năm 2022 là khoảng 2,1 triệu người và tốc độ gia tăng dân số trung bình mỗi năm là 0,0075%.

a) Dự đoán dân số của thành phố đó vào năm 2032.

b) Nếu tốc độ gia tăng dân số vẫn giữ nguyên như trên thì ước tính vào năm nào dân số của thành phố đó sẽ tăng gấp đôi so với năm 2022?

Lời giải

Dân số của thành phố từ năm 2022 lần lượt tạo thành cấp số nhân có công bội là $1 + 0,0075 = 1,0075$

Dân số của thành phố vào năm n là: $u_n = 2,1 \cdot 1,0075^{n-2022}$

a) $u_{2032} = 2,1 \cdot 1,0075^{2032-2022} = 2,26$

b) Khi $u_n = 2 \cdot u_{2022} \Leftrightarrow 1,0075^{n-2022} = 2 \Leftrightarrow n = 2115$

Vậy đến năm 2115, dân số thành phố gấp đôi so với năm 2022.

Câu 6: Trong trò chơi mạo hiểm nhảy bungee, mỗi lần nhảy, người chơi sẽ được dây an toàn có tính đàn hồi kéo nảy ngược lên 60% chiều sâu của cú nhảy. Một người chơi bungee thực hiện cú nhảy đầu tiên có độ cao nảy ngược lên là 9 m.

- a) Tính độ cao nảy ngược lên của người đó ở lần nảy thứ ba.
b) Tính tổng các độ cao nảy ngược lên của người đó trong 5 lần nảy đầu.



Lời giải

Độ cao nảy ngược lên của người đó ở lần nảy thứ nhất là $u_1 = 9$

Độ cao các lần nảy lần lượt tạo thành cấp số nhân có công bội là $q = 0,6$ $u_n = 9 \cdot 0,6^{n-1}$

a) $u_3 = 9 \cdot 0,6^{3-1} = 3,24$

b) $S_5 = \frac{5 \cdot [1 - 0,6^5]}{1 - 0,6} = 11,528$

Câu 7: Một công ty xây dựng mua một chiếc máy ủi với giá 3 tỉ đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá trị của chiếc máy ủi này lại giảm 20% so với giá trị của nó trong năm liền trước đó. Tìm giá trị còn lại của chiếc máy ủi đó sau 5 năm sử dụng.

Lời giải

Giá trị của chiếc máy ủi mỗi năm lập thành một cấp số nhân với số hạng đầu bằng 3 và công bội $q = 0,8$

Giá trị của chiếc máy ủi sau 5 năm sử dụng là: $u_5 = 3 \times 0,8^{5-1} = 0,1875$ (tỷ đồng)

Câu 8: Vào năm 2020, dân số của một quốc gia là khoảng 97 triệu người và tốc độ tăng trưởng dân số là 0,91%. Nếu tốc độ tăng trưởng dân số này được giữ nguyên hằng năm, hãy ước tính dân số của quốc gia đó vào năm 2030.

Lời giải

Dân số hằng năm lập thành cấp số nhân với số hạng đầu là 97 và công bội $q = 1.0091$

Dân số của quốc gia đó năm 2030 (tức $n = 11$) là $u_{11} = 97 \times 1.0091^{11-1} = 106.197$ (triệu người)

Câu 9: Một loại thuốc được dùng mỗi ngày một lần. Lúc đầu nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân tăng nhanh, nhưng mỗi liều kế tiếp có tác dụng ít hơn liều trước đó. Lượng thuốc trong máu ở ngày thứ nhất là 50mg, và mỗi ngày sau đó giảm chỉ còn một nửa so với ngày kế trước đó. Tính tổng lượng thuốc (tính bằng mg) trong máu của bệnh nhân sau khi dùng thuốc 10 ngày liên tiếp.

Lời giải

Lượng thuốc trong máu mỗi ngày của bệnh nhân lập thành cấp số nhân với số hạng đầu là 50 và công bội $q = 0.5$

Tổng lượng thuốc trong máu 10 ngày liên tiếp chính là tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân này

$$\text{và bằng: } S_n = \frac{50[1 - (0.5)^{10}]}{1 - 0.5} = 99.902(\text{mg})$$

Câu 10: Ban đầu, một quả lắc đồng hồ dao động theo một cung tròn dài 46 cm (H. 2.1). Sau mỗi lần đu liên tiếp, độ dài của cung tròn bằng 0,98 độ dài cung tròn ở ngay lần trước đó.

a) Độ dài của cung tròn ở lần thứ 10 là bao nhiêu?

b) Sau 15 lần dao động, quả lắc sẽ đi được quãng đường tổng cộng là bao nhiêu?

(Kết quả tính theo centimét và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



Hình 2.1

Lời giải

Gọi u_n là độ dài cung tròn ở lần thứ n khi con lắc dao động. Do lần một, quả lắc đồng hồ dao động theo một cung tròn dài 46 cm, sau mỗi lần dao động liên tiếp, độ dài của cung tròn bằng 0,98 độ dài cung tròn ở ngay lần trước đó nên dãy số (u_n) lập thành cấp số nhân có $u_1 = 46$ và công bội $q = 0,98$.

a) Độ dài của cung tròn ở lần thứ 10 là $u_{10} = u_1 q^9 = 46 \cdot 0,98^9 \approx 38,35(\text{ cm})$.

b) Sau 15 lần dao động, quả lắc sẽ đi được quãng đường tổng cộng là

$$S_{15} = u_1 \frac{1 - q^{15}}{1 - q} = 46 \cdot \frac{1 - 0,98^{15}}{1 - 0,98} \approx 601,29(\text{ cm}).$$

Câu 11: Các bệnh truyền nhiễm có thể lây lan rất nhanh. Giả sử có năm người bị bệnh trong tuần đầu tiên của một đợt dịch, và mỗi người bị bệnh sẽ lây bệnh cho bốn người vào cuối tuần tiếp theo. Tính đến hết tuần thứ 10 của đợt dịch, có bao nhiêu người đã bị lây bởi căn bệnh này?

Lời giải

Gọi u_n là số người bị bệnh ở cuối tuần thứ n . Vì có năm người bị bệnh trong tuần đầu tiên của một đợt dịch, và mỗi người bị bệnh sẽ lây bệnh cho bốn người vào cuối tuần tiếp theo nên dãy số (u_n) là một cấp số nhân có $u_1 = 5$ và công bội $q = 4$.

Suy ra số người bị ảnh hưởng bởi dịch bệnh ở cuối tuần 10 là $u_{10} = u_1 q^9 = 5 \cdot 4^9 = 1310720$ (người).

Câu 12: Nếu một kĩ sư được một công ty thuê với mức lương hằng năm là 180 triệu đồng và nhận được mức tăng lương hằng năm là 5%, thì mức lương của người kĩ sư đó là bao nhiêu khi bắt đầu năm thứ sáu làm việc cho công ty?

Lời giải

Gọi u_n là số triệu đồng mà người kĩ sư đó nhận được ở năm thứ n . Vì người kĩ sư được công ty thuê với mức lương hằng năm là 180 triệu đồng và nhận được mức tăng lương hằng năm là 5% nên dãy số (u_n) là một cấp số nhân có $u_1 = 180$ và công bội $q = 1 + 5\% = 1,05$.

Khi bắt đầu năm thứ sáu làm việc cho công ty thì mức lương năm của người kĩ sư đó là $u_6 = u_1 q^5 = 229,73$ (triệu đồng)

Câu 13: Để tích lũy tiền cho việc học đại học của con gái, cô Hoa quyết định hằng tháng bỏ ra 500 nghìn đồng vào tài khoản tiết kiệm, được trả lãi 0,5% cộng dồn hằng tháng. Có bắt đầu chương trình tích lũy này khi con gái cô tròn 3 tuổi. Cô ấy sẽ tích lũy được bao nhiêu tiền vào thời điểm gửi khoản tiền thứ 180? Lúc này con gái cô Hoa bao nhiêu tuổi?

Lời giải

Gọi u_n là số triệu đồng mà cô Hoa có trong chương trình tích lũy ở lần gửi thứ n (vào đầu tháng thứ n).

Kí hiệu $a = 0,5$ triệu đồng, $r = 0,5\%$.

Số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng 1 là $u_1 = a$.

Số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng 2 là $u_2 = u_1(1+r) + a$.

Số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng 3 là

$$u_3 = u_2(1+r) + a = a(1+r)^2 + a(1+r) + a.$$

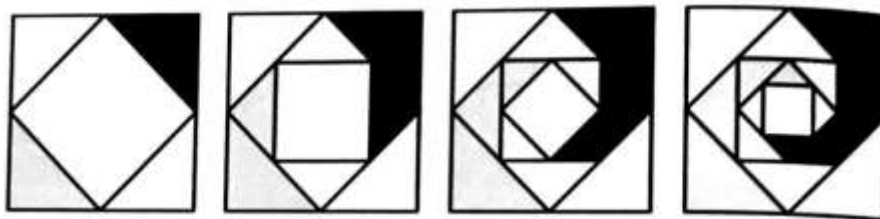
Tương tự cho các tháng tiếp theo, suy ra số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng n là

$$u_n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \dots + a(1+r) + a = a \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} = a \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Vào thời điểm gửi khoản tiền thứ 180, cô ấy sẽ tích lũy được $u_{180} = a \frac{(1+r)^{180} - 1}{r} = 145,41$ (triệu đồng).

Khi đó, tuổi của con gái cô Hoa là $3 + 180 : 12 = 18$ tuổi.

Câu 14: Các cạnh của hình vuông ban đầu có chiều dài 16 cm. Một hình vuông mới được hình thành bằng cách nối các điểm giữa của các cạnh của hình vuông ban đầu và hai trong số các hình tam giác kết quả được tô màu (hình vẽ dưới). Nếu quá trình này được lặp lại năm lần nữa, hãy xác định tổng diện tích của vùng được tô màu.



Lời giải

Gọi u_n là diện tích hai tam giác được tô màu ở lần thực hiện thứ n . Gọi a là độ dài cạnh của hình vuông ban đầu.

Ở lần 1 thì độ dài cạnh tam giác vuông cân là $\frac{a}{2}$ nên $u_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{a}{2} \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2^2}$

và độ dài cạnh hình vuông sau đó là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ở lần 2 thì độ dài cạnh tam giác vuông cân là $\frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $u_2 = \frac{a^2}{2^3}$.

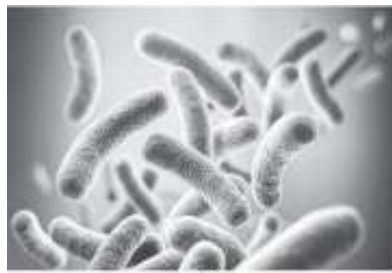
Ở lần 3 thì độ dài cạnh tam giác vuông cân là $\frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $u_3 = \frac{a^2}{2^4}$.

Như vậy, dãy số (u_n) là cấp số nhân với $u_1 = \frac{a^2}{4}$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Vậy tổng diện tích sau năm lần thực hiện là $S_5 = u_1 \frac{1-q^5}{1-q} = 124 (\text{cm}^2)$.

Chú ý. Diện tích cần tính bằng diện tích hình vuông ngoài cùng trừ đi diện tích hình vuông trong cùng rồi chia 2.

Câu 15: Một loại vi khuẩn được nuôi cấy trong ống nghiệm, cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Nếu ban đầu có 200 vi khuẩn, tính số lượng vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 2 giờ.



Hình 1

Lời giải

Ta có: 2 giờ = 120 phút = 6.20 phút. Do đó sau 2 giờ vi khuẩn phân đôi 6 lần.

Gọi u_n là số lượng vi khuẩn có trong ống nghiệm sau lần phân đôi thứ $n-1$.

Khi đó, dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_1 = 200$ và $q = 2$.

Ta có $u_7 = u_1 \cdot q^6 = 200 \cdot 2^6 = 12800$.

Vậy sau 2 giờ, trong ống nghiệm có 12800 vi khuẩn.

Câu 16: Bác Năm gửi tiết kiệm vào ngân hàng 100 triệu đồng với hình thức lãi kép, kì hạn một năm với lãi suất 8%/năm. Tính số tiền cả gốc và lãi bác Năm nhận được sau 10 năm. (Giả sử lãi suất không thay đổi trong suốt thời gian gửi tiền.)

Lời giải

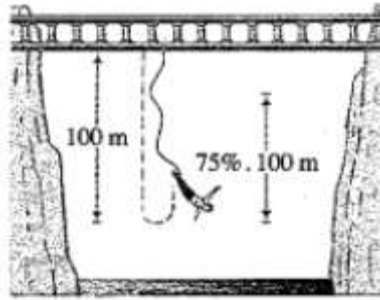
Khoảng 215 892 500 triệu đồng.

Câu 17: Một người chơi nhảy bungee trên một cây cầu với một sợi dây dài 100m. Sau mỗi lần rơi xuống, người chơi được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 80% so với lần rơi trước và lại rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên. Tính tổng quãng đường đi lên của người đó sau 10 lần được kéo lên.

Lời giải

$$S_{10} = \frac{80(1-0,8^{10})}{1-0,8} \approx 357,05(m).$$

Câu 18: Một người nhảy bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây đai an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây dài 100 m. Giả sử sau mỗi lần rơi xuống, người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ cao bằng 75% so với lần rơi trước đó và lại bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên (Hình 3). Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần rơi xuống và lại được kéo lên, tính từ lúc bắt đầu nhảy (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Hình 3

Lời giải

Gọi u_1 (m) là quãng đường người chơi rơi xuống ở lần thứ nhất, ta có: $u_1 = 100$;

v_1 (m) là quãng đường người chơi được kéo lên ở lần thứ nhất, ta có: $v_1 = 100 \cdot 0,75 = 75$;

u_2 (m) là quãng đường người chơi rơi xuống ở lần thứ hai, ta có: $u_2 = v_1 = 0,75u_1$;

v_2 (m) là quãng đường người chơi được kéo lên ở lần thứ hai, ta có: $v_2 = 0,75u_2 = 0,75v_1$.

Như vậy, ta có hai cấp số nhân đều có công bội 0,75 là: $u_1, u_2, \dots, u_{10}$ và $v_1, v_2, \dots, v_{10}$ với $u_1 = 100$ và $v_1 = 75$.

Ta có:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{10} = 100 \cdot \left(\frac{1-0,75^{10}}{1-0,75} \right); v_1 + v_2 + \dots + v_{10} = 75 \cdot \left(\frac{1-0,75^{10}}{1-0,75} \right).$$

Vậy quãng đường người đó đi được sau 10 lần rơi xuống và lại được kéo lên (tính từ lúc bắt đầu nhảy) là:

$$(u_1 + u_2 + \dots + u_{10}) + (v_1 + v_2 + \dots + v_{10}) = 175 \cdot \left(\frac{1-0,75^{10}}{1-0,75} \right) \approx 661(\text{ m}).$$

Câu 19: Anh Dũng kí hợp đồng lao động trong 10 năm với phương án trả lương như sau: Năm thứ nhất, tiền lương của anh Dũng là 120 triệu đồng. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương của anh Dũng được tăng lên 10%. Tính tổng số tiền lương anh Dũng lĩnh được trong 10 năm đầu đi làm (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị triệu đồng).

Lời giải

Ta có tiền lương năm thứ nhất của anh Dũng là: 120 triệu đồng.

Tiền lương năm thứ hai của anh Dũng là:

$$120 + 120 \cdot 10\% = 120(1 + 0,1) = 120 \cdot 1,1 \text{ (triệu đồng)}.$$

Tiền lương năm thứ ba của anh Dũng là:

$$120 \cdot 1,1 + 120 \cdot 1,1 \cdot 10\% = 120 \cdot 1,1(1 + 0,1) = 120 \cdot 1,1^2 \text{ (triệu đồng)}.$$

Cứ tiếp tục như vậy, ta được tiền lương năm thứ 10 của anh Dũng là 120. 1,1⁹ (triệu đồng).

Do vậy, tiền lương mỗi năm của anh Dũng nhận được trong 10 năm lập thành một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 120$ và công bội $q = 1,1$.

Khi đó tổng số tiền lương anh Dũng lĩnh được trong 10 năm đầu đi làm là:

$$S_{10} = \frac{u_1(1 - q^{10})}{1 - q} = \frac{120 \cdot [1 - (1,1)^{10}]}{1 - 1,1} \approx 1912 \text{ (triệu đồng)}$$

Vậy tổng số tiền lương anh Dũng lĩnh được trong 10 năm đầu đi làm là 1912 triệu đồng.

Bài 20: Một cái tháp có 11 tầng. Diện tích của mặt sàn tầng 2 bằng nửa diện tích của mặt đáy tháp và diện tích của mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt sàn mỗi tầng ngay bên dưới. Biết mặt đáy tháp có diện tích là 12288 m². Tính diện tích của mặt sàn tầng trên cùng của tháp theo đơn vị mét vuông.

Lời giải

Diện tích mặt đáy tháp là $u_1 = 12288$ (m²).

Diện tích mặt sàn tầng 2 là: $u_2 = 12\ 288 \cdot \frac{1}{2} = 6144$ (m²).

Gọi diện tích mặt sàn tầng n là u_n với $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy u_n lập thành một cấp số nhân là $u_1 = 12288$ và công bội $q = \frac{1}{2}$, có số hạng tổng quát là:

$$u_n = 12288 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Diện tích mặt tháp trên cùng chính là mặt tháp thứ 11 nên ta có:

$$u_{11} = 12\ 288 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11-1} = 12 \text{ (m}^2 \text{)}.$$

Bài 21: Một khay nước có nhiệt độ 23°C được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước giảm 20%. Tính nhiệt độ của khay nước đó sau 6 giờ theo đơn vị độ C.

Lời giải

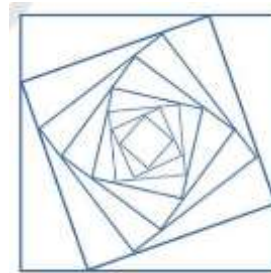
Gọi u_n là nhiệt độ của khay nước đó sau n giờ (đơn vị độ C) với $n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $u_1 = 23; u_2 = 23 - 23 \cdot 20\% = 23 \cdot (1 - 20\%) = 23 \cdot 80\%; u_3 = 23 \cdot 80\% \cdot 80\% = 23 \cdot (80\%)^2; \dots$

Suy ra dãy u_n lập thành một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 23$ và công bội $q = 80\%$ có số hạng tổng quát $u_n = 23 \cdot (80\%)^{n-1}$ độ C

Vậy sau 6 giờ thì nhiệt độ của khay là $u_6 = 23 \cdot (80\%)^5 \approx 7,5^\circ \text{C}$.

Bài 22: Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 4. Người ta chia mỗi cạnh hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 (Hình 4). Từ hình vuông C_2 lại làm tiếp tục như trên để có hình vuông C_3 . Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$. Gọi a_n là độ dài cạnh hình vuông C_n . Chứng minh rằng dãy số (a_n) là cấp số nhân.



Hình 4

Lời giải

Độ dài cạnh của hình vuông đầu tiên là: $a_1 = 4$.

Độ dài cạnh của hình vuông thứ n là: a_n .

Độ dài cạnh của hình vuông thứ $n+1$ là: $a_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right) \cdot a_n$.

Suy ra: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{10}}{4}$

Vậy (a_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $a_1 = 4$ và công bội $q = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

Bài 23: Ông An vay ngân hàng 1 tỉ đồng với lãi suất 12% / năm. Ông đã trả nợ theo cách: Bắt đầu từ tháng thứ nhất sau khi vay, cuối mỗi tháng ông trả ngân hàng cùng số tiền là a (đồng) và đã trả hết nợ sau đúng 2 năm kể từ ngày vay. Hỏi số tiền mỗi tháng mà ông An phải trả là bao nhiêu đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?

Lời giải

Gọi u_n là số tiền sau mỗi tháng ông An còn nợ ngân hàng.

Lãi suất mỗi tháng là 1%.

Ta có:

$$u_1 = 1000000000 \text{ đồng.}$$

$$u_2 = u_1 + u_1 \cdot 1\% - a = u_1(1+1\%) - a \text{ (đồng)}$$

$$u_3 = u_1(1+1\%) - a + [u_1(1+1\%) - a] \cdot 1\% - a$$

$$= u_1(1+1\%)^2 - a(1+1\%) - a$$

...

$$u_n = u_1(1+1\%)^{n-1} - a(1+1\%)^{n-2} - a(1+1\%)^{n-3} - a(1+1\%)^{n-4} - \dots - a.$$

Ta thấy dãy $a(1+1\%)^{n-2}; a(1+1\%)^{n-3}; a(1+1\%)^{n-4}; \dots; a$ lập thành một cấp số nhân với số hạng đầu $a_1 = a$ và công bội $q = 1+1\% = 99\%$ có tổng $n-2$ số hạng đầu là:

$$S_{n-2} = \frac{a(1-(99\%)^{n-2})}{1-99\%} = 100a[1-(99\%)^{n-2}].$$

$$\text{Suy ra } u_n = u_1(1+1\%)^{n-1} - 100a[1-(99\%)^{n-2}]$$

Vì sau 2 năm = 24 tháng thì ông An trả xong số tiền nên $n = 24$ và $u_{24} = 0$. Do đó ta có:

$$u_{24} = u_1(1+1\%)^{23} - 100a[1 - (99\%)^{22}] = 0$$

$$\Leftrightarrow 10000000000.(99\%)^{23} - 100a[1 - (99\%)^{22}] = 0.$$

$$\Leftrightarrow a = 40006888,25$$

Vậy mỗi tháng ông An phải trả 40006888,25 đồng.

Câu 24: Một cây đàn organ có tần số âm thanh các phím liên tiếp tạo thành một cấp số nhân. Cho biết tần số phím La Trung là 400 Hz và tần số của phím LaCao cao hơn 12 phím là 800 Hz (nguồn: <https://vi.wikipedia.org/wiki/Organ>). Tìm công bội của cấp số nhân nói trên (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Lời giải

Ta có: $q^{12} = \frac{800}{400} = 2$. Suy ra: $q = 1,06$.

Câu 25: Dân số Việt Nam năm 2020 là khoảng 97,6 triệu người (theo *Niên giám thống kê năm 2020*). Nếu trung bình mỗi năm tăng 1,14% thì ước tính dân số Việt Nam năm 2040 là khoảng bao nhiêu người (làm tròn kết quả đến hàng trăm nghìn)?

Lời giải

Ước tính dân số Việt Nam năm 2040 là: $97,6.(1+0,0114)^{20} = 122,4$ (triệu người).

Câu 26: Tế bào *E. Coli* trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Hỏi sau 24 giờ, tế bào ban đầu sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

Lời giải

Số tế bào phân chia sau mỗi 20 phút tạo thành cấp số nhân với số hạng đầu là 2, công bội là 2. Sau 24 giờ (tức $n = (24.60):20 = 72$) tế bào ban đầu phân chia thành số tế bào là:

$$u_{72} = 2.2^{71} = 4.722.10^{21}$$

$$u_{72} = 2.2^{71} = 4.722.10^{21}$$

Câu 27: Mặt sàn tầng một (tầng trệt) của một ngôi nhà cao hơn mặt sân 0,5 m. Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai gồm 25 bậc, mỗi bậc cao 16 cm.

a) Viết công thức để tìm độ cao của bậc cầu thang thứ n so với mặt sân.

b) Tính độ cao của sàn tầng hai so với mặt sân.

Lời giải

a. Mỗi bậc thang cao 16 cm = 0,16 m.

$$\Rightarrow n \text{ bậc thang cao } 0,16n(\text{m})$$

Vì mặt bằng sàn cao hơn mặt sân 0,5 m nên công thức tính độ cao của bậc n so với mặt sân sẽ là: $h_n = (0,5 + 0,16n)(\text{m})$

b. Độ cao của sàn tầng hai so với mặt sân ứng với $n = 25$ là:

$$h_{25} = 0,5 + 0,16 \times 25 = 4,5(\text{ m})$$

Câu 28: Một hình vuông màu vàng có cạnh 1 đơn vị dài được chia thành chín hình vuông nhỏ hơn và hình vuông ở chính giữa được tô màu xanh như Hình 2.1 Mỗi hình vuông màu vàng nhỏ

hơn lại được chia thành chín hình vuông con, và mỗi hình vuông con ở chính giữa lại được tô màu xanh. Nếu quá trình này được tiếp tục lặp lại năm lần, thì tổng diện tích các hình vuông được tô màu xanh bao nhiêu?

Lời giải

Diện tích ô vuông màu xanh sau lần phân chia thứ nhất là: $\frac{1}{9}$, số ô vuông màu xanh được tạo thêm là 8^0

Diện tích ô vuông màu xanh sau lần phân chia thứ hai là: $\frac{1}{9^2}$, số ô vuông màu xanh được tạo thêm là 8^1

Diện tích ô vuông màu xanh sau lần phân chia thứ năm là: $\frac{1}{9^5}$, số ô vuông màu xanh được tạo thêm là 8^4

Tổng diện tích các ô vuông màu xanh là: $\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} \times 8^1 + \dots + \frac{1}{9^5} \times 8^4 = 0,445$

Câu 29: Một tháp 10 tầng có diện tích sàn của tầng dưới cùng là $6144m^2$. Tính diện tích mặt sàn tầng trên cùng, biết rằng diện tích mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt sàn tầng ngay bên dưới.



Lời giải

$$u_{10} = u_1 \cdot q^9 = 6144 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 12(m^2).$$

Câu 30: Một khay nước có nhiệt độ $20^\circ C$ được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Cho biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước đá giảm đi 25%. Tính nhiệt độ khay nước đó sau 4 giờ.



Lời giải $u_5 = u_1 \cdot q^4 = 20 \cdot 0,75^4 \approx 6,33^\circ C.$