

VẬN DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN THỰC TẾ

PHẦN I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 1.** Một chất điểm chuyển động có phương trình $S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Gia tốc tại thời điểm vận tốc bị triệt tiêu là:
A. $-9m/s^2$. **B.** $9m/s^2$. **C.** $-12m/s^2$. **D.** $12m/s^2$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = S' = 3t^2 - 6t - 9 \\ a = S'' = 6t - 6 \end{cases}$$

$$\text{Khi vận tốc bị triệt tiêu tức } v = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 < 0 \\ t = 3 \text{ (tm)} \end{cases}$$

Khi đó gia tốc tại thời điểm vận tốc bị triệt tiêu là $a = 6.3 - 6 = 12 (m/s^2)$.

- Câu 2.** Một vật chuyển động theo quy luật $s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?
A. $89(m/s)$. **B.** $71(m/s)$. **C.** $109(m/s)$. **D.** $\frac{25}{3}(m/s)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Vì } s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t \Rightarrow v = t^2 - 2t + 9.$$

$$\text{Xét hàm } f(t) = t^2 - 2t + 9 \Rightarrow f'(t) = 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

BBT của hàm số $f(t) = t^2 - 2t + 9$

t	0	1	10
$f'(t)$		0	
$f(t)$	9	8	89

Dựa vào BBT ta thấy: $\max_{[0;10]} f(t) = f(10) = 89$.

Vậy vận tốc của vật đạt được lớn nhất bằng $89(m/s)$.

- Câu 3.** Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = t^2 - \frac{1}{6}t^3 (m)$. Tìm thời điểm t (giây) mà tạo đó vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.
A. $t = 2$. **B.** $t = 0,5$. **C.** $t = 2,5$. **D.** $t = 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $v(t) = s'(t) = 2t - \frac{1}{2}t^2$. Suy ra $v'(t) = 2 - t$ và $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Bảng biến thiên

t	2		
$v'(t)$	+	0	-
$v(t)$	2 ↙ ↘		

Vậy chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm $t = 2$ (giây).

Câu 4. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$ với t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 289 (m/s). **B.** 105 (m/s). **C.** 111 (m/s). **D.** 487 (m/s).

Lời giải

Chọn B

Ta có $v(t) = s' = -6t^2 + 48t + 9$

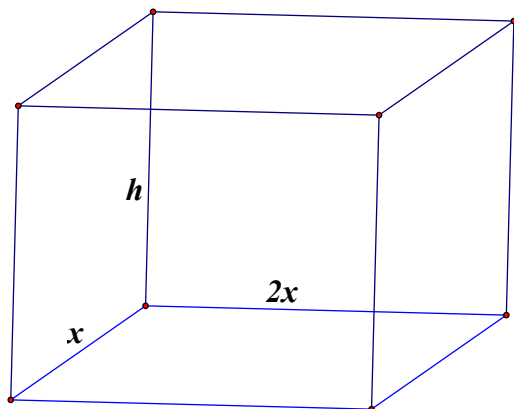
Xét hàm số $v(t) = -6t^2 + 48t + 9$, $t \in [0; 10]$.

Ta có $v'(t) = -12t + 48 = 0 \Leftrightarrow t = 4$ (Nhận). Ta có
$$\begin{cases} v(0) = 9 \\ v(4) = 105 \\ v(10) = -111 \end{cases} \Rightarrow \max_{t \in [0; 10]} v(t) = v(4) = 105.$$

Câu 5. Một người bán gạo muốn đóng một thùng tôn đựng gạo có thể tích không đổi bằng 10 m^3 . Thùng tôn là hình hộp chữ nhật có chiều dài đáy bằng hai lần chiều rộng và không có nắp. Trên thị trường giá tôn làm đáy thùng là $75.000/\text{m}^2$ và giá tôn làm thành xung quanh thùng là $55.000/\text{m}^2$. Tính chi phí thấp nhất để làm thùng đựng gạo. (Làm tròn đến hàng nghìn)

A. 1.418.000 đồng. **B.** 1.403.000 đồng. **C.** 1.402.000 đồng. **D.** 1.417.000 đồng.

Lời giải



Gọi x là chiều rộng của đáy thùng, $x > 0$, đơn vị m .

$\Rightarrow$ chiều dài của đáy thùng là: $2x$.

Ta có $V = x.2x.h = 10 \Rightarrow h = \frac{5}{x^2}$.

Chi phí làm đáy thùng là: $2x^2.75 = 150x^2$ (đơn vị nghìn đồng).

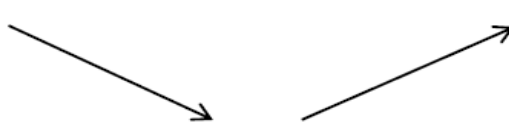
Chi phí làm diện tích xung quanh là: $\left(2x \cdot \frac{5}{x^2} + 2.2x \cdot \frac{5}{x^2}\right) \cdot 55 = \frac{1650}{x}$ (đơn vị nghìn đồng).

$\Rightarrow$ Chi phí làm thùng là: $T = 150x^2 + \frac{1650}{x}$ (đơn vị nghìn đồng).

Xét hàm số $T = 150x^2 + \frac{1650}{x}$, với $x > 0$.

Ta có $T'(x) = 300x - \frac{1650}{x^2}$; $T'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{11}{2}}$.

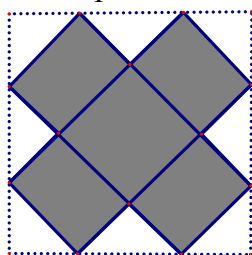
Bảng biến thiên

x	0 $\sqrt[3]{\frac{11}{2}}$ $+\infty$		
$T'(x)$		- 0 +	
$T(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên $T(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \sqrt[3]{\frac{11}{2}}$.

Vậy chi phí ít nhất bằng $T = 150\sqrt[3]{\frac{11}{2}}^2 + \frac{1650}{\sqrt[3]{\frac{11}{2}}} = 1.402.127$ đồng.

Câu 6. Từ hình vuông có cạnh bằng 6 người ta cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ. Sau đó người ta gấp thành hình hộp chữ nhật không nắp. Tính thể tích lớn nhất của khối hộp.



A. $8\sqrt{2}$.

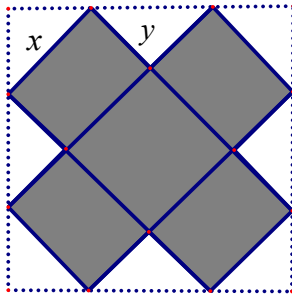
B. $10\sqrt{2}$.

C. $9\sqrt{2}$.

D. $11\sqrt{2}$.

Lời giải

Đặt kích thước các cạnh như hình vẽ



Ta có $\frac{x}{\sqrt{2}} + y\sqrt{2} + \frac{x}{\sqrt{2}} = 6 \Leftrightarrow x + y = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow y = 3\sqrt{2} - x$ với $0 < x < 3\sqrt{2}$.

Thể tích của khối hộp tạo thành là $V = x^2 y = x^2 (3\sqrt{2} - x)$.

Ta có $V' = 3x(2\sqrt{2} - x) = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$.

Ta có bảng biến thiên

x	0	$2\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$
V'		0	
		-	+
V		$8\sqrt{2}$	

Vậy: $\max V = 8\sqrt{2}$ khi $x = 2\sqrt{2}, y = \sqrt{2}$.

Câu 7. Ông A dự định sử dụng hết $5,5 \text{ m}^2$ kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?:

A. $1,17 \text{ m}^3$.

B. $1,01 \text{ m}^3$.

C. $1,51 \text{ m}^3$.

D. $1,40 \text{ m}^3$.

Lời giải

Gọi $x, 2x, h$ lần lượt là chiều rộng, dài, cao của bể cá.

Ta có $2x^2 + 2(xh + 2xh) = 5,5 \Leftrightarrow h = \frac{5,5 - 2x^2}{6x}$ (Điều kiện $0 < x < \sqrt{\frac{5,5}{2}}$).

Thể tích bể cá $V = 2x^2 \cdot \frac{5,5 - 2x^2}{6x} = \frac{1}{3}(5,5x - 2x^3)$.

$V' = \frac{1}{3}(5,5 - 6x^2) \cdot V' = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{5,5}{6}}$.

Lập BBT suy ra $V_{\max} = \frac{11\sqrt{33}}{54} \approx 1,17 \text{ m}^3$.

Câu 8. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 216 (m/s)

B. 30 (m/s)

C. 400 (m/s)

D. 54 (m/s)

Lời giải

Chọn D

Vận tốc tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 18t$ với $t \in [0; 10]$.

Ta có : $v'(t) = -3t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

Suy ra: $v(0) = 0; v(10) = 30; v(6) = 54$. Vậy vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng 54 (m/s).

Câu 9.

Trong một chuyển động thẳng, chất điểm chuyển động xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 3t + 10$, trong đó thời gian t tính bằng giây và quãng đường s tính bằng mét.

Gia tốc của chất điểm tại thời điểm chất điểm dừng lại là

A. -6 m/s^2 .

B. 0 m/s^2 .

C. 12 m/s^2 .

D. 10 m/s^2 .

Lời giải

Chọn B

Vận tốc của chất điểm tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 3$.

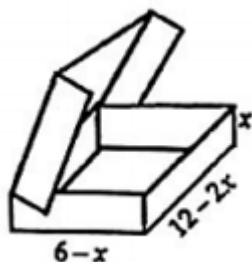
Gia tốc của chất điểm tại thời điểm t là $g(t) = v'(t) = 6t - 6$.

Tại thời điểm chất điểm dừng lại thì $v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Khi đó gia tốc là $g(1) = 0 \text{ m/s}^2$.

Câu 10.

Một hộp đựng Chocolate bằng kim loại có hình dạng lúc mở nắp như hình vẽ dưới đây. Một phần tư thể tích phía trên của hộp được rải một lớp bơ sữa ngọt, phần còn lại phía dưới chứa đầy chocolate nguyên chất. Với kích thước như hình vẽ, gọi $x = x_0$ là giá trị làm cho hộp kim loại có thể tích lớn nhất, khi đó thể tích chocolate nguyên chất có giá trị V_0 bằng



A. 64 (đvtt).

B. $\frac{64}{3}$ (đvtt).

C. 16 (đvtt).

D. 48 (đvtt).

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $0 < x < 6$.

Thể tích của hộp kim loại là: $V(x) = (6-x)(12-2x)x = 2x^3 - 24x^2 + 72x$ (đvtt).

$V'(x) = 6x^2 - 48x + 72, 0 < x < 6$.

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 6 \end{cases} (l)$$

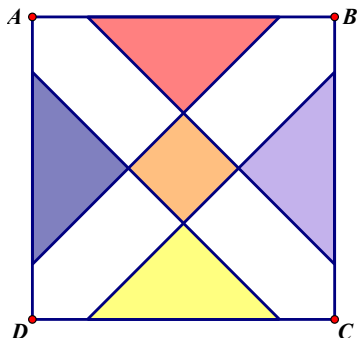
Bảng biến thiên:

x	0	2	6	
$V'(x)$		+	0	-
$V(x)$			64	

Từ bảng biến thiên suy ra thể tích hộp kim loại lớn nhất khi và chỉ khi $x = 2$.

Vậy $V_0 = \frac{3}{4}V(2) = \frac{3}{4}.64 = 48$ (đvtt).

Câu 11. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4, chính giữa có một hình vuông đồng tâm với $ABCD$. Biết rằng bốn tam giác là bốn tam giác cân. Hỏi tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ nhất bằng bao nhiêu?



A. $\frac{19}{3}$.

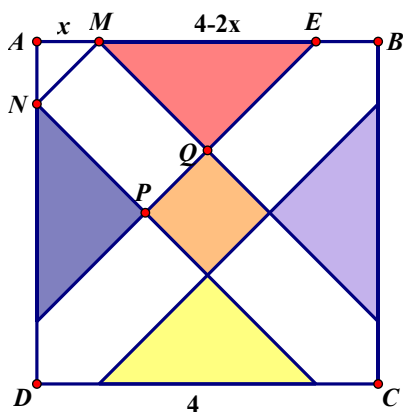
B. $\frac{17}{3}$.

C. $\frac{16}{3}$.

D. $\frac{14}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $AM = x$ ($0 < x < 4$) $\Rightarrow ME = 4 - 2x$.

$$\begin{aligned} 2MQ^2 &= (4 - 2x)^2 \\ \Leftrightarrow MQ^2 &= 2(2 - x)^2 \\ \Leftrightarrow MQ &= \sqrt{2}(2 - x) \end{aligned}$$

Gọi S tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ.

$$S = 4 \cdot \frac{MQ^2}{2} + PQ^2 = 2MQ^2 + MN^2 = (4 - 2x)^2 + (x\sqrt{2})^2 = 6x^2 - 16x + 16$$

$$S' = 12x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{4}{3}$	4
S'	-	0	+
S			

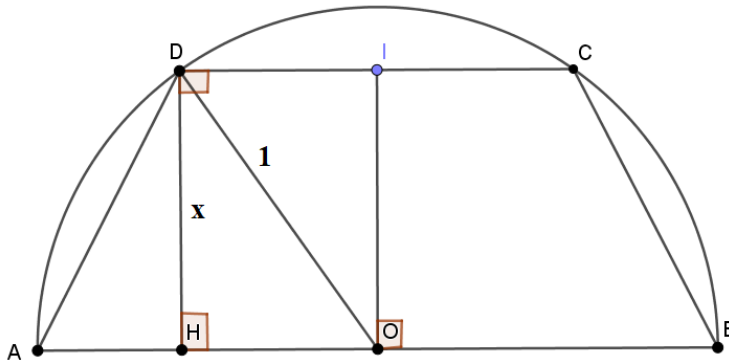
Vậy $S_{\min} = \frac{16}{3}$

Câu 12. Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2$ và hai điểm C, D thay đổi trên nửa đường tròn đó sao cho $ABCD$ là hình thang. Diện tích lớn nhất của hình thang $ABCD$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. C. 1. D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên AB , I là trung điểm của đoạn CD và O là trung điểm của AB . Đặt $DH = x$, $0 < x < 1$. Ta có $DC = 2DI = 2OH = 2\sqrt{OD^2 - DH^2} = 2\sqrt{1 - x^2}$.

Diện tích của hình thang $ABCD$ là $S = f(x) = \frac{(AB + CD)DH}{2} = (1 + \sqrt{1 - x^2})x$.

Ta có $f'(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2} + 1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} + 1 - 2x^2 = 0$ (*)

Đặt $t = \sqrt{1 - x^2}$, (điều kiện $t \geq 0$) khi đó phương trình (*) trở thành $2t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$.

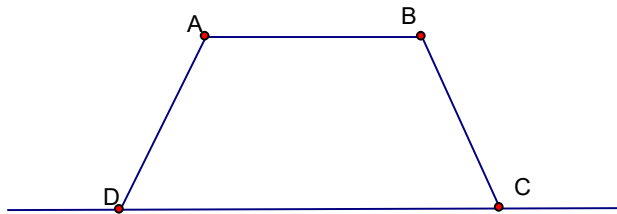
$t = -1$ loại. $t = \frac{1}{2}$ ta có $\sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	1	

Vậy diện tích lớn nhất của hình thang $ABCD$ bằng $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 13. Một người nông dân có 3 tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $12(m)$ và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ (bờ sông là đường thẳng DC không phải rào, mỗi tấm là một cạnh của hình thang). Hỏi ông ta có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu m^2 ?



A. $100\sqrt{3}$.

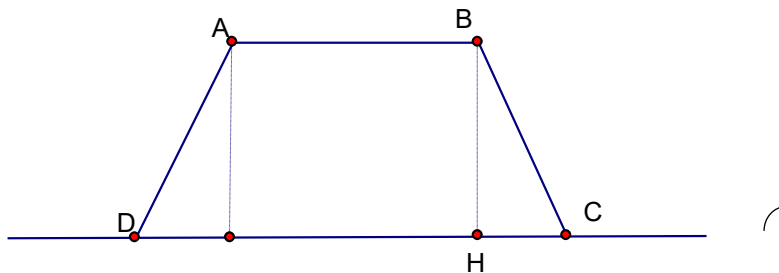
B. $106\sqrt{3}$.

C. $108\sqrt{3}$.

D. $120\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Kẻ đường cao BH , gọi số đo 2 góc ở đáy CD của hình thang là $x, x \in (0^\circ; 90^\circ)$.

Diện tích mảnh vườn là:

$$S = \frac{1}{2} BH (AB + CD) = \frac{1}{2} BC \cdot \sin x (2AB + 2BC \cdot \cos x) = \frac{1}{2} AB^2 (2 \sin x + \sin 2x)$$

Xét hàm số $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$ với $x \in (0^\circ; 90^\circ)$ có $f'(x) = 2 \cos x + 2 \cos 2x$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos x + 2 \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -1 \end{cases}$$

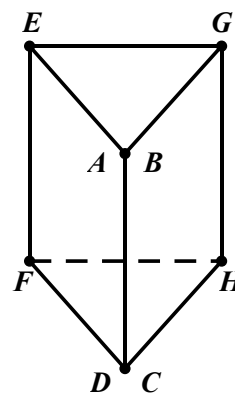
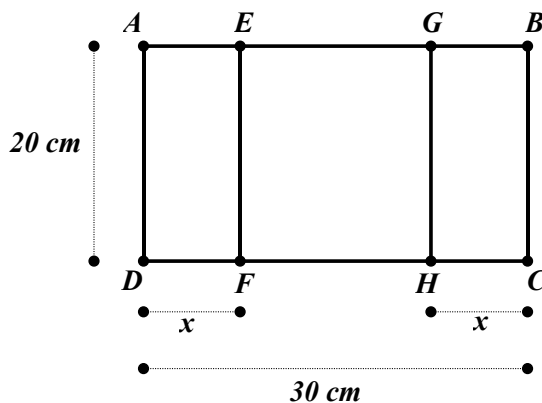
Do $x \in (0^\circ; 90^\circ)$ nên ta nhận $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 60^\circ$. Ta có bảng biến thiên:

x	0°	60°	90°
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow \frac{3\sqrt{3}}{2} \searrow$		

Từ bảng biến thiên ta thấy: $\underset{(0^\circ; 90^\circ)}{\text{Max}} f(x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ đạt được tại $x = 60^\circ$.

$\Rightarrow \text{Max} S = 108\sqrt{3} (m^2)$ khi góc ở đáy CD của hình thang bằng 60° ($C = D = 60^\circ$).

Câu 14. Một tấm kẽm hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 30$ cm; $BC = 20$ cm. Người ta gấp tấm kẽm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Giá trị của x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là:



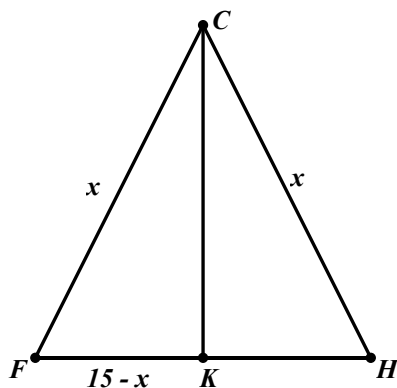
- A.** $x = 10$ (cm). **B.** $x = 9$ (cm). **C.** $x = 8$ (cm). **D.** $x = 5$ (cm).

Lời giải

Chọn A

Có $FH = 30 - 2x$. Để tồn tại tam giác FCH thì $\begin{cases} x + x > 30 - 2x \\ x + (30 - 2x) > x \end{cases} \Leftrightarrow \frac{15}{2} < x < 15$.

Gọi K là trung điểm FH .



Xét tam giác CFK vuông tại K ta có: $CK = \sqrt{CF^2 - FK^2} = \sqrt{x^2 - (15 - x)^2} = \sqrt{30x - 225}$.

Diện tích tam giác CFH là $S_{CFH} = \frac{1}{2} FH \cdot CK = \frac{1}{2} (30 - 2x) \cdot \sqrt{30x - 225} = (15 - x) \cdot \sqrt{30x - 225}$.

Khi gập tấm kẽm ta được lăng trụ đứng có chiều cao cố định bằng 20 cm nên thể tích của nó lớn nhất khi diện tích đáy S_{CFH} lớn nhất.

Xét hàm số $S(x) = (15-x) \cdot \sqrt{30x-225}$ trên khoảng $\left(\frac{15}{2}; 15\right)$.

Có $S'(x) = -\sqrt{30x-225} + (15-x) \cdot \frac{30}{2\sqrt{30x-225}} = \frac{450-45x}{\sqrt{30x-225}}$. Dễ thấy $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$.

Bảng biến thiên:

x	$\frac{15}{2}$	10	15
$S'(x)$		0	
$S(x)$		$25\sqrt{3}$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\max_{\left(\frac{15}{2}; 15\right)} S(x) = 25\sqrt{3}$ khi $x = 10$.

Vậy thể tích khối lăng trụ lớn nhất khi $x = 10$ (cm).

Câu 15. Một chất điểm chuyển động với quy luật $s(t) = 6t^2 - t^3$. Thời điểm t (giây) tại vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất bằng

A. 12.

B. 24.

C. 2.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có $s(t) = 6t^2 - t^3 \Rightarrow v(t) = s'(t) = 12t - 3t^2$.

$\Rightarrow v'(t) = 12 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Bảng biến thiên:

t	0	2	$+\infty$
$v'(t)$	+	0	-
$v(t)$		12	

Vậy vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất bằng 12 khi $t = 2$.

Câu 16. Độ giảm huyết áp của một bệnh $G(x) = 0,025x^2(30-x)$ trong đó x là số miligam thuốc được tiêm cho bệnh nhân ($0 < x < 30$). Để bệnh nhân đó có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm vào là

A. $x = 15(mg)$.

B. $x = 20(mg)$.

C. $x = 20(mg)$.

D. $x = 25(mg)$.

Lời giải

Chọn C

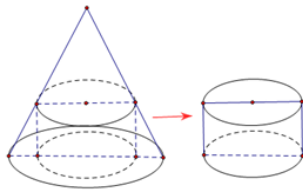
$G'(x) = 1,5x - 0,075x^2$

$$G'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 20$$

x	0	20	30	
$G'(x)$		+	0	-
$G(x)$	0	$G_{\max}$	0	

Vậy để bệnh nhân đó có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm vào là $x = 20(mg)$.

Câu 17. Một khúc gỗ có dạng hình khối nón có bán kính đáy bằng $r = 2m$, chiều cao $h = 6m$. Bác thợ mộc chế tác từ khúc gỗ đó thành một khúc gỗ có dạng hình khối trụ như hình vẽ. Gọi V là thể tích lớn nhất của khúc gỗ hình trụ sau khi chế tác. Giá trị của V là:



A. $V = \frac{32}{9}\pi(m^3)$. **B.** $V = \frac{32}{3}\pi(m^3)$. **C.** $V = \frac{32}{27}\pi(m^3)$. **D.** $V = \frac{32}{5}\pi(m^3)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi r_t , h_t lần lượt là bán kính và chiều cao của khối trụ.

Ta có: $\frac{r_t}{2} = \frac{6-h_t}{6} \Rightarrow 2(6-h_t) = 6r_t \Leftrightarrow h_t = 6-3r_t$.

Ta lại có: $V = \pi r_t^2 \cdot h_t = \pi r_t^2 (6-3r_t) = \pi (6r_t^2 - 3r_t^3)$.

Xét hàm số $f(r_t) = 6r_t^2 - 3r_t^3$, với $r_t \in (0; 2)$ có $f'(r_t) = 12r_t - 9r_t^2$;

$$f'(r_t) = 0 \Leftrightarrow r_t = \frac{4}{3}.$$

Bảng biến thiên:

r_t	0			$\frac{4}{3}$	2		
$f'(r_t)$		+		0	-		
$f(r_t)$				$\frac{32}{9}$			
		0			0		

Dựa vào BBT ta có $\max f(r_t) = \frac{32}{9}$ đạt tại $r_t = \frac{4}{3}$.

Vậy $V = \frac{32}{9}\pi$.

Cách 2: $V = \pi r_t^2 \cdot h_t = \pi r_t^2 (6 - 3r_t) = 12\pi \frac{r_t}{2} \frac{r_t}{2} (2 - r_t)$. Áp dụng BĐT Co-si, V max khi

$$\frac{r_t}{2} = 2 - r_t \Leftrightarrow r_t = \frac{4}{3}.$$

Câu 18. Ông A dự định sử dụng hết 8 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. 2.05 m^3 .

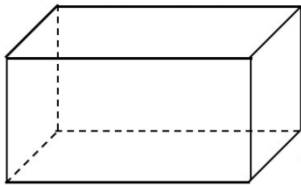
B. 1.02 m^3 .

C. 1.45 m^3 .

D. 0.73 m^3 .

Lời giải

Chọn A



Gọi chiều rộng, chiều dài, chiều cao của bể lần lượt là $x, 2x, y$ ($x, y > 0$).

Diện tích phần lắp kính là

$$2x \cdot x + 2xy + 2.2x \cdot y = 2x^2 + 6xy = 8 \Leftrightarrow xy = \frac{8 - 2x^2}{6} > 0 \Rightarrow x < \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

Thể tích bể cá là: $V = 2x \cdot x \cdot y = 2x \cdot \frac{8 - 2x^2}{6} = \frac{-4x^3 + 16x}{6}$ với $0 < x < 2$

$$\text{Ta có: } V' = \frac{-12x^2 + 16}{6}, V' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ x = -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} (L)$$

x	0	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
V'		+	0
V			-

$$\Rightarrow V_{\max} = V\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \approx 2,05 \text{ m}^3$$

Câu 19. Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất được uốn thành một hình vuông, đoạn thứ hai được uốn thành một vòng tròn. Hỏi khi tổng diện tích của hình vuông và hình tròn ở trên nhỏ nhất thì chiều dài đoạn dây uốn thành hình vuông bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. 30,54cm.

B. 33,61cm.

C. 40,62cm.

D. 26,43cm

Lời giải

Chọn B

Gọi x ($0 < x < 60$) là chiều dài của đoạn thứ hai, suy ra $60 - x$ là độ dài đoạn thứ nhất.

Khi đó cạnh hình vuông là $15 - \frac{x}{4}$ nên diện tích hình vuông là $\left(15 - \frac{x}{4}\right)^2$.

Chu vi của vòng tròn là $2\pi R = x \Rightarrow R = \frac{x}{2\pi}$. Khi đó diện tích hình tròn là $\pi R^2 = \frac{x^2}{4\pi}$.

Khi đó tổng diện tích của hai hình sẽ là $f(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \left(15 - \frac{x}{4}\right)^2$.

Khi đó ta có $f'(x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2}\left(15 - \frac{x}{4}\right) = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}\right) - \frac{15}{2}$.

Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{15}{\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}}$. Suy ra tổng diện tích hai hình nhỏ nhất khi $x = \frac{60\pi}{4 + \pi}$.

Khi đó cạnh hình vuông sẽ là $60 - \frac{60\pi}{4 + \pi} \approx 33,61$.

- Câu 20.** Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được một nhà sinh học mô tả bởi hàm số $P(t) = \frac{t+1}{t^2+t+4}$, trong đó $P(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t sử dụng độc tố. Vào thời điểm nào thì số lượng vi khuẩn X bắt đầu giảm?
- A.** Ngay từ lúc bắt đầu sử dụng độc tố. **B.** Sau 0,5 giờ.
C. Sau 2 giờ. **D.** Sau 1 giờ.

Lời giải

Chọn D

$$\diamond \text{ Xét } P'(t) = \frac{-t^2 - 2t + 3}{(t^2 + t + 4)^2} = \frac{(t-1)(-t-3)}{(t^2 + t + 4)^2}.$$

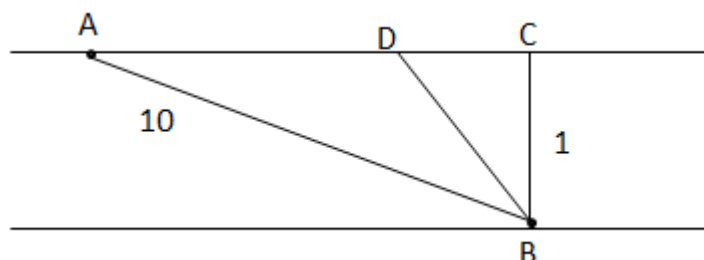
$$P'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 1 \end{cases}.$$

Ta thấy hàm số đạt cực đại tại $t = 1$ và $P'(t) < 0, \forall t \in (1; +\infty)$ nên sau 1(h) thì vi khuẩn bắt đầu giảm.

- Câu 21.** Trong một bài thực hành huấn luyện quân sự có một tình huống chiến sĩ phải bơi qua sông để tấn công mục tiêu ở ngay phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 100m và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một phần ba vận tốc chạy trên bộ. Hãy cho biết chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất? Biết dòng sông là thẳng, mục tiêu cách chiến sĩ 1km theo đường chim bay và chiến sĩ cách bờ bên kia 100m.
- A.** $\frac{200\sqrt{2}}{3}$. **B.** $75\sqrt{3}$. **C.** $\frac{200\sqrt{3}}{3}$. **D.** $75\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi A là mục tiêu; B là vị trí chiến sĩ, BD là đường bơi của chiến sĩ.

Chọn 1 đơn vị độ dài là 100m, suy ra $BC=1; AB=10; AC=3\sqrt{11}$

Gọi vận tốc bơi của chiến sỹ là 1 đơn vị vận tốc, thì vận tốc chạy của chiến sỹ là 3 đơn vị vận tốc.

Gọi x là quãng đường chiến sỹ bơi suy ra $BD=x$; Vậy quãng đường chiến sỹ chạy là

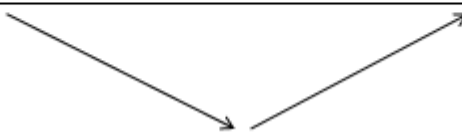
$$AD = AC - CD = 3\sqrt{11} - \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\text{Thời gian chiến sỹ đến được mục tiêu là: } t = \frac{3\sqrt{11} - \sqrt{x^2 - 1}}{3} + \frac{x}{1} = \sqrt{11} - \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 1} + x$$

Xét hàm $f(x) = \sqrt{11} - \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 1} + x$ có

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{3} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}}{4} (TM) \\ x = -\frac{3\sqrt{2}}{4} (L) \end{cases}$$

BBT

x	1	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$	10
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Vậy thời gian chiến sỹ đến mục tiêu ngắn nhất khi $f(x)_{\min} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

Vậy chiến sỹ phải bơi $\frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot 100 = 75\sqrt{2} (m)$.

Câu 22. Ông X muốn xây một bình chứa hình trụ có thể tích 72 m^3 . Đáy làm bằng bê tông giá 100 nghìn đồng/ m^2 , thành làm bằng tôn giá 90 nghìn đồng/ m^2 , nắp bằng nhôm giá 140 nghìn đồng/ m^2 . Vậy đáy của hình trụ có bán kính bằng bao nhiêu để chi phí xây dựng là thấp nhất?

- A.** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}} (m)$. **B.** $\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}} (m)$. **C.** $\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}} (m)$. **D.** $\frac{3\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{\pi}} (m)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $x(m)$, ($x > 0$) là bán kính đáy của bình chứa hình trụ.

Khi đó tổng số tiền phải trả là: $14 \cdot 10^4 \pi x^2 + 10^5 \pi x^2 + \frac{144 \cdot 9 \cdot 10^4}{x}$.

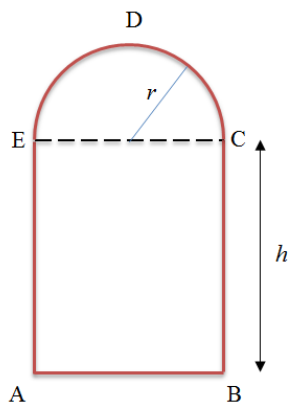
Đặt $f(x) = 14 \cdot 10^4 \pi x^2 + 10^5 \pi x^2 + \frac{144 \cdot 9 \cdot 10^4}{x}$.

Suy ra: $f'(x) = 48 \cdot 10^4 \pi x - \frac{1296 \cdot 10^4}{x^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 48 \cdot 10^4 \pi x - \frac{1296 \cdot 10^4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$.

Vậy để chi phí xây dựng là thấp nhất thì bán kính đáy bằng $\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$.

Câu 23. Bác thợ hàn dùng một thanh kim loại dài $4m$ để uốn thành khung cửa sổ có dạng như hình vẽ.



Gọi r là bán kính của nửa đường tròn. Tìm r (theo m) để diện tích tạo thành đạt giá trị lớn nhất.

- A.** 1. **B.** 0,5. **C.** $\frac{4}{\pi+4}$. **D.** $\frac{2}{\pi+4}$.

Lời giải

Chọn C

♦ Ta có $2(h+r) + \pi r = 4 \Rightarrow h = \frac{4-2r-\pi r}{2}$.

♦ Diện tích của khung cửa là $S = \frac{1}{2}\pi r^2 + 2rh = \frac{1}{2}\pi r^2 + 2r\left(\frac{4-2r-\pi r}{2}\right) = -\frac{\pi+4}{2}r^2 + 4r$.

♦ Ta có $h = \frac{4-2r-\pi r}{2} > 0 \Leftrightarrow 0 < r < \frac{4}{\pi+2}$.

♦ Xét hàm số $S(r) = -\frac{\pi+4}{2}r^2 + 4r$ trên $\left(0; \frac{4}{\pi+2}\right)$.

$S'(r) = -(\pi+4)r + 4 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{4}{\pi+4}$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{4}{\pi+4}$	$\frac{4}{\pi+2}$
S'	+	0	-
S		$\frac{8}{\pi+4}$	

$\Rightarrow S(r)$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow r = \frac{4}{\pi+4}$.

Câu 24. Một loại vi khuẩn được tiêm một loại thuốc kích thích sự sinh sản. Sau t phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức $N(t) = 1000 + 30t^2 - t^3$ ($0 \leq t \leq 30$). Hỏi sau bao giây thì số vi khuẩn lớn nhất?

- A.** 20. **B.** 10. **C.** 1200. **D.** 1100.

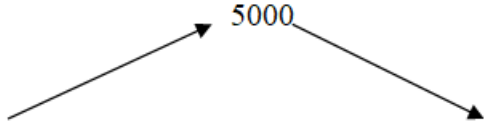
Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $N(t) = 1000 + 30t^2 - t^3$ ($0 \leq t \leq 30$).

$$N'(t) = 60t - 3t^2.$$

$$N'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 20 \end{cases}.$$

t	0	20	30
N'	+	0	-
N			

Với $t = 20$ giây thì số vi khuẩn lớn nhất.

Câu 25. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S = 6t^2 - t^3$. Vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm $t(s)$ bằng

- A.** $12(s)$. **B.** $6(s)$. **C.** $4(s)$. **D.** $2(s)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $v = S' = 12t - 3t^2$ suy ra $v' = 12 - 6t$ nên $v' = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Bảng biến thiên:

t	0	2	$+\infty$
v'	+	0	-
v	0	12	$-\infty$

Do vậy $v_{\max} = 12(m/s)$ tại $t = 2(s)$.

Câu 26. Ông Bình dự định sử dụng hết $5,5m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A.** $1,01m^3$. **B.** $1,17m^3$. **C.** $1,51m^3$. **D.** $1,40m^3$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $x, 2x, y$ ($x, y > 0$) lần lượt là chiều rộng, chiều dài, chiều cao của bể cá

Theo giả thiết ta có: $2.2xy + 2.xy + 2x^2 = 5,5 \Leftrightarrow 6xy + 2x^2 = 5,5 \Leftrightarrow y = \frac{5,5 - 2x^2}{6x}$

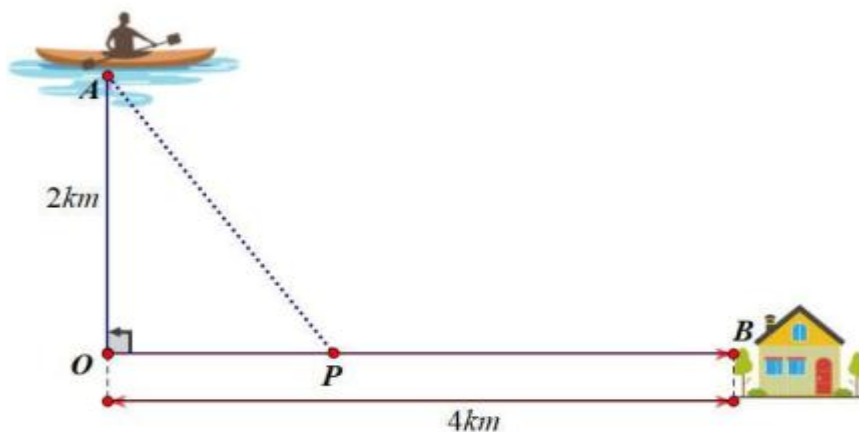
Thể tích bể cá là: $V(x) = 2x^2y = 2x^2 \cdot \frac{5,5 - 2x^2}{6x} = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{6}x$

Khảo sát hàm số $V(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{6}x$ trên khoảng $(0; +\infty)$

$$V'(x) = -2x^2 + \frac{11}{6}; V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{11}{3}}$$

Thể tích lớn nhất của bể cá là $V\left(\sqrt{\frac{11}{3}}\right) = 1,17m^3$.

Câu 27. Anh Ba đang trên chiếc thuyền tại vị trí A cách bờ sông $2km$, anh dự định chèo thuyền vào bờ và tiếp tục chạy bộ theo một đường thẳng để đến một địa điểm B tọa lạc ven bờ sông, B cách vị trí O trên bờ gần với thuyền nhất là $4km$ (hình vẽ). Biết rằng anh Ba chèo thuyền với vận tốc $6m/h$ và chạy bộ trên bờ với vận tốc $10km/h$. Khoảng thời gian ngắn nhất để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là



A. 40 phút.

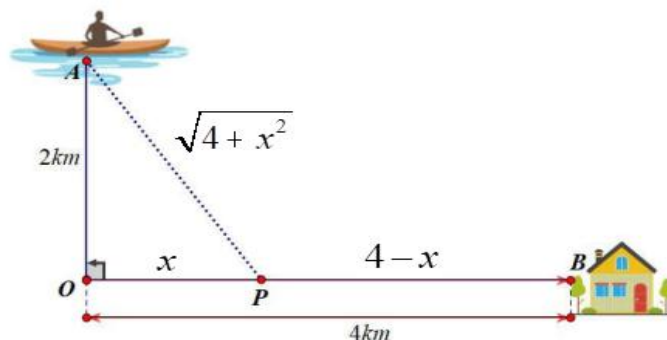
B. 44 phút.

C. 30 phút.

D. 38 phút.

Lời giải

Chọn A



Đặt $OP = x$ ($0 < x < 4$) $\Rightarrow BP = 4 - x$; $AP = \sqrt{4 + x^2}$.

Khoảng thời gian để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là:

$$t_{(x)} = t_{AP} + t_{PB} = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{6} + \frac{4 - x}{10} (h). \Rightarrow t'_{(x)} = \frac{x}{6\sqrt{4 + x^2}} - \frac{1}{10}.$$

$$t'_{(x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{4 + x^2}} - \frac{1}{10} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{4 + x^2} = 5x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 4 \\ 4x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

BBT:

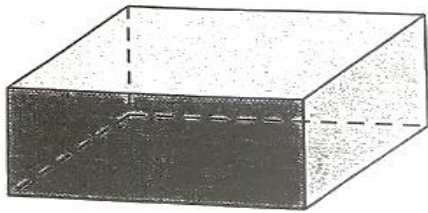
x	0	$\frac{3}{2}$	4	
$t'(x)$		-	0	+
$t(x)$				

$\swarrow$ $\frac{2}{3}$ $\nearrow$

Từ BBT suy ra khoảng thời gian ngắn nhất để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là:

$$t_{\min} = \frac{2}{3}(h) = \frac{2}{3} \cdot 60(\text{phút}) = 40 \text{ phút}.$$

Câu 28. Một người thợ gò làm một cái hòm dạng hình hộp chữ nhật có nắp bằng tôn. Biết rằng độ dài đường chéo hình hộp bằng $3\sqrt{2}dm$ và chỉ được sử dụng vừa đủ $18dm^2$ tôn. Với yêu cầu như trên người thợ có thể làm được cái hòm có thể tích lớn nhất bằng



A. $8dm^3$.

B. $2\sqrt{2}dm^3$.

C. $6dm^3$.

D. $4dm^3$.

Lời giải

Chọn D

Gọi a, b, c ($a > 0, b > 0, c > 0$) là 3 kích thước của hình hộp chữ nhật. Không mất tính tổng quát $0 < c \leq b \leq a$.

Theo bài ra $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 18(1).$

Diện tích toàn phần của khối hộp là $2ab + 2bc + 2ca = 18(2).$

Từ (1), (2) ta có $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 36 \Rightarrow a + b + c = 6(3).$

Từ (3), (2) ta có: $ab + c(6 - c) = 9 \Rightarrow ab = 9 + c^2 - 6c.$

Thể tích của cái hòm $V = abc = (c^2 - 6c + 9)c = c^3 - 6c^2 + 9c, (0 < c < \sqrt{6}).$

Đặt $h(c) = c^3 - 6c^2 + 9c \Rightarrow h'(c) = 3c^2 - 12c + 9 \Rightarrow h'(c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ c = 3 \end{cases}.$

c	0	1		$\sqrt{6}$
$h'(c)$		+	0	-
$h(c)$		4		
	0			$-36 + 15\sqrt{6}$

Thể tích lớn nhất bằng $4dm^3$ khi $c=1, a=4, b=1$.

Câu 29. Bạn A có một đoạn dây dài $20m$, bạn chia đoạn dây thành hai phần. Phần đầu uốn thành một tam giác đều, phần còn lại uốn thành một hình vuông. Hỏi độ dài phần đầu bằng bao nhiêu để tổng diện tích hai hình trên là nhỏ nhất.

- A. $\frac{120}{9+4\sqrt{3}}m$. B. $\frac{60}{9+4\sqrt{3}}m$. C. $\frac{180}{9+4\sqrt{3}}m$. D. $\frac{40}{9+4\sqrt{3}}m$.

Lời giải

Giả sử độ dài của đoạn dây là $AB = 20m$. Đoạn dây được chia thành hai phần

+) Phần thứ nhất là $AM = x$, (với $0 < x < 20$) được uốn thành một tam giác đều có cạnh là $\frac{x}{3}m$

$\Rightarrow$ Diện tích của tam giác là $\frac{\sqrt{3}}{36}x^2$.

+) Phần thứ hai là $BM = 20 - x$ được uốn thành hình vuông có cạnh là $\frac{20-x}{4}m$

$\Rightarrow$ Diện tích của hình vuông là $\frac{(20-x)^2}{16}$.

$\Rightarrow$ Tổng diện tích của hai hình là $\frac{\sqrt{3}}{36}x^2 + \frac{(20-x)^2}{16}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{36}x^2 + \frac{(20-x)^2}{16}$ (với $0 < x < 20$)

Ta có $f'(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{18} + \frac{1}{8}\right)x - \frac{5}{2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{180}{4\sqrt{3}+9}$

BBT

x	0	$\frac{180}{4\sqrt{3}+9}$	20
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Từ BBT suy ra hàm số đạt GTNN khi $x = \frac{180}{4\sqrt{3}+9}$.

Câu 30. Giám đốc một nhà hát A đang phân vân trong việc xác định mức giá vé xem các chương trình được trình chiếu trong nhà hát. Việc này rất quan trọng nó sẽ quyết định nhà hát thu được bao nhiêu lợi nhuận từ các buổi trình chiếu. Theo những cuốn sổ ghi chép của mình, ông ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là 20 USD/người thì trung bình có 1000 người đến xem. Nhưng nếu tăng thêm 1 USD/người thì sẽ mất 100 khách hàng hoặc giảm đi 1 USD/người thì sẽ có thêm 100 khách hàng trong số trung bình. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 2 USD

lợi nhuận cho nhà hát trong các dịch vụ đi kèm. Hãy giúp giám đốc nhà hát này xác định xem cần tính giá vé vào cửa là bao nhiêu để thu nhập là lớn nhất.

A. 18 USD/người. **B.** 19 USD/người. **C.** 14 USD/người. **D.** 25 USD/người.

Lời giải

Gọi giá vé sau khi điều chỉnh là $20 + x$ ($x + 20 > 0$)

Số khách là: $1000 - 100x$

Tổng thu nhập

$$f(x) = (20 + x \cdot 1 + 2)(1000 - 100x) = (22 + x)(1000 - 100x) = -100x^2 - 1200x + 22000$$

Bảng biến thiên

x	-20	-6	$+\infty$
$f'(x)$		0	
	$+$		$-$
$f(x)$	$-\infty$	$f(-6)$	$-\infty$

$$\max_{(-20; +\infty)} f(x) = f(-6). \text{ Suy ra giá vé là: } x + 20 = 20 - 6 = 14 \text{ USD}$$

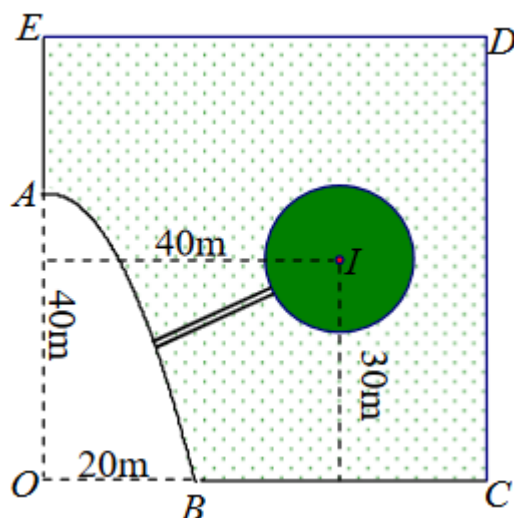
Câu 31. Một cái ao hình $ABCDE$ (như hình vẽ), ở giữa ao có một mảnh vườn hình tròn có bán kính 10 m. Người ta muốn bắc một cầu từ bờ AB của ao đến vườn. Tính gần đúng độ dài tối thiểu l của cây cầu biết :

- Hai bờ AE và BC nằm trên hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm O ;

- Bờ AB là một phần của một parabol có đỉnh là điểm A và có trục đối xứng là đường thẳng OA ;

- Độ dài đoạn OA và OB lần lượt là 40 m và 20 m;

- Tâm I của mảnh vườn lần lượt cách đường thẳng AE và BC lần lượt 40 m và 30 m.



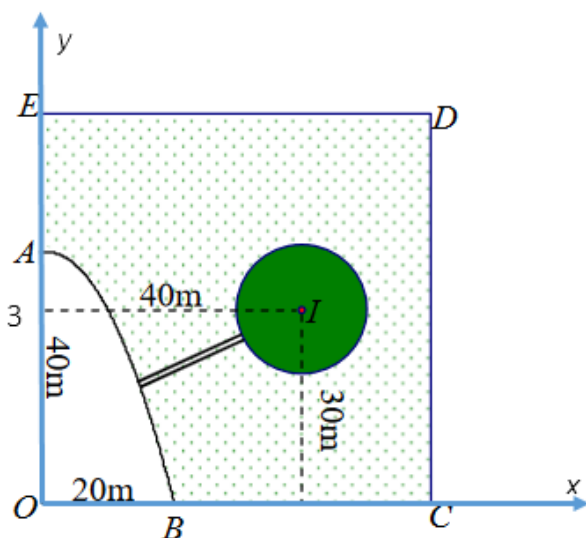
A. $l \approx 17,7$ m.

B. $l \approx 25,7$ m.

C. $l \approx 27,7$ m.

D. $l \approx 15,7$ m.

Lời giải :



Gán trục tọa độ Oxy sao cho $\begin{cases} A \in Oy \\ B \in Ox \end{cases}$ cho đơn vị là 10 m.

Khi đó mảnh vườn hình tròn có phương trình $(C): (x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$ có tâm $I(4;3)$

Bờ AB là một phần của Parabol $(P): y = 4 - x^2$ ứng với $x \in [0;2]$

Vậy bài toán trở thành tìm MN nhỏ nhất với $\begin{cases} M \in (P) \\ N \in (C) \end{cases}$.

Đặt trường hợp khi đã xác định được điểm N thì $MN + MI \geq IN$, vậy MN nhỏ nhất khi $MN + MI = IN \Leftrightarrow N, M, I$ thẳng hàng.

Bây giờ, ta sẽ xác định điểm N để IN nhỏ nhất

$$N \in (P) \Leftrightarrow N(x; 4-x^2) \quad IN = \sqrt{(4-x)^2 + (1-x^2)^2} \Leftrightarrow IN^2 = (4-x)^2 + (1-x^2)^2$$

$$\Leftrightarrow IN^2 = x^4 - x^2 - 8x + 17$$

$$\text{Xét } f(x) = x^4 - x^2 - 8x + 17 \text{ trên } [0;2] \Leftrightarrow f'(x) = 4x^3 - 2x - 8$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 1,3917 \text{ là nghiệm duy nhất và } 1,3917 \in [0;2]$$

$$\text{Ta có } f(1,3917) = 7,68; f(0) = 17; f(2) = 13.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[0;2]$ gần bằng 7,68 khi $x \approx 1,3917$

$$\text{Vậy } \min IN \approx \sqrt{7,68} \approx 2,77 \Leftrightarrow IN = 27,7 \text{ m} \Leftrightarrow MN = IN - IM = 27,7 - 10 = 17,7 \text{ m}.$$

Câu 32. Bạn A có một đoạn dây mềm và dẻo không đàn hồi 20 m, bạn chia đoạn dây thành hai phần, phần đầu gấp thành một tam giác đều. Phần còn lại gấp thành một hình vuông. Hỏi độ dài phần đầu bằng bao nhiêu (m) để tổng diện tích hai hình trên là nhỏ nhất?

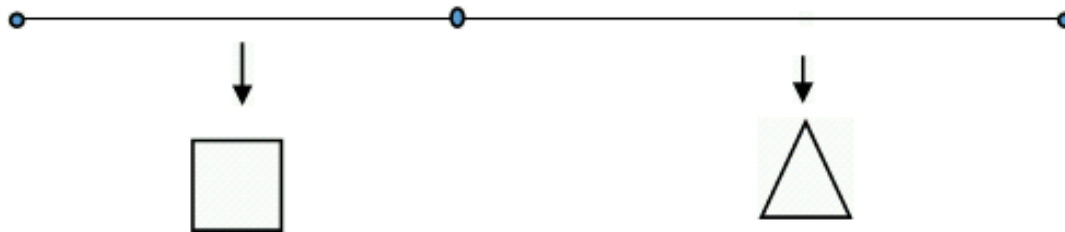
A. $\frac{120}{9+4\sqrt{3}} \text{ m}.$

B. $\frac{40}{9+4\sqrt{3}} \text{ m}.$

C. $\frac{180}{9+4\sqrt{3}} \text{ m}.$

D. $\frac{60}{9+4\sqrt{3}} \text{ m}.$

Lời giải



Gọi x (m) là cạnh của tam giác đều, $\left(0 < x < \frac{20}{3}\right)$.

Suy ra cạnh hình vuông là $\frac{20-3x}{4}$ (m).

Gọi S là tổng diện tích của hai hình.

$$S(x) = x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{20-3x}{4}\right)^2.$$

$$\text{Ta có : } S'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2 \cdot \frac{20-3x}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right).$$

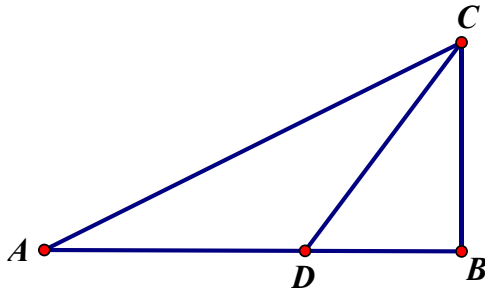
$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2 \cdot \frac{20-3x}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{60}{9+4\sqrt{3}}.$$

Bảng biến thiên

x	0 $\frac{60}{9+4\sqrt{3}}$ $\frac{20}{3}$		
$S'(x)$		- 0 +	
$S(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên, S đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{60}{9+4\sqrt{3}}$ m.

Câu 33. Một người cần đi từ khách sạn A bên bờ biển đến hòn đảo C . Biết rằng khoảng cách từ đảo C đến bờ biển là 10 km, khoảng cách từ khách sạn A đến điểm B trên bờ gần đảo C nhất là 40 km. Người đó có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đi đường thủy (như hình vẽ bên). Biết kinh phí đi đường thủy là 5 USD/km, đi đường bộ là 3 USD/km. Hỏi người đó phải đi đường bộ một khoảng bao nhiêu để kinh phí nhỏ nhất? ($AB = 40$ km, $BC = 10$ km)



- A. 10 km. B. $\frac{65}{2}$ km. C. 40 km. D. $\frac{15}{2}$ km.

Lời giải

Đặt $AD = x$ km, $x \in [0; 40] \Rightarrow BD = 40 - x \Rightarrow CD = \sqrt{(40 - x)^2 + 10^2}$.

Tổng kinh phí đi từ A đến C là $f(x) = x \cdot 3 + \sqrt{(40 - x)^2 + 10^2} \cdot 5$.

$$f(x) = 3x + 5\sqrt{x^2 - 80x + 1700}.$$

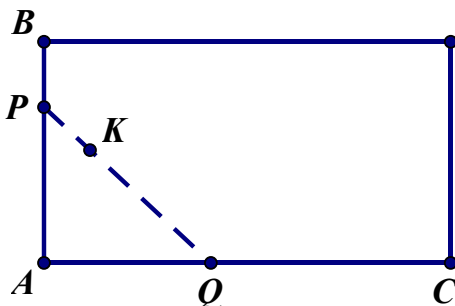
$$f'(x) = 3 + 5 \frac{2x - 80}{2\sqrt{x^2 - 80x + 1700}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{3\sqrt{x^2 - 80x + 1700} + 5x - 200}{\sqrt{x^2 - 80x + 1700}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 - 80x + 1700} = 200 - 5x \Leftrightarrow x = \frac{65}{2}.$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{65}{2}$	40
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

- Câu 34.** Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc nhỏ của hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là 1 m và cách bờ AC là 8 m, rồi dùng một cây sào ngăn một góc nhỏ của hồ để thả bè (như hình vẽ). Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB, AC và cây cọc K (bỏ qua đường kính của sào).



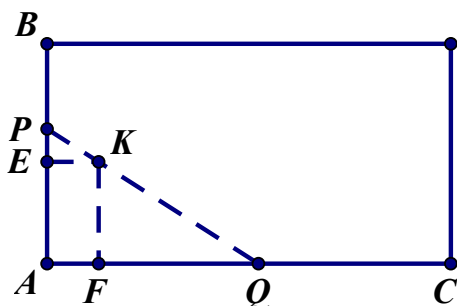
A. $\frac{5\sqrt{65}}{4}$.

B. $5\sqrt{5}$.

C. $9\sqrt{2}$.

D. $\frac{5\sqrt{71}}{4}$.

Lời giải



Đặt $AP = a$; $AQ = b$ ($a, b > 0$).

Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của K xuống AB và AC . Suy ra $KE = 1$, $KF = 8$.

Ta có: $\frac{KE}{AQ} = \frac{PK}{PQ}$; $\frac{KF}{AP} = \frac{QK}{PQ} \Rightarrow \frac{KF}{AP} + \frac{KE}{AQ} = 1$ hay là $\frac{8}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

(Hoặc có thể dùng phép tọa độ hóa: Gán $A = (0; 0)$, $P = (0; a)$, $Q = (b; 0)$. Khi đó $K = (1; 8)$).

Phương trình đường thẳng PQ : $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$. Vì PQ đi qua K nên $\frac{1}{b} + \frac{8}{a} = 1$.)

Vì $\frac{8}{a} + \frac{1}{b} = 1 \Rightarrow b = \frac{a}{a-8}$ với $a > 8$. Khi đó $PQ^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \left(\frac{a}{a-8}\right)^2$ với $a > 8$.

Xét hàm số $f(a) = a^2 + \left(\frac{a}{a-8}\right)^2$ với $a > 8$.

Ta có $f'(a) = 2a + \frac{2a}{a-8} \cdot \frac{-8}{(a-8)^2} = \frac{2a[(a-8)^3 - 8]}{(a-8)^3}$; $f'(a) = 0 \Rightarrow a = 10$.

BBT của $f(a)$:

a	8	10	$+\infty$
$f'(a)$	-	0	+
$f(a)$	$+\infty$	125	$+\infty$

Vậy GTNN của $f(a)$ là 125 khi $a = 10$.

Từ đó suy ra chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB , AC và cây cọc K là $\sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

- Câu 35.** Một người bán buôn Thanh Long Đỏ ở Lập Thạch – Vĩnh Phúc nhận thấy rằng: Nếu bán với giá 20000 nghìn /kg thì mỗi tuần có 90 khách đến mua và mỗi khách mua trung bình 60 kg. Cứ tăng giá 2000 nghìn /kg thì khách mua hàng tuần giảm đi 1 và khi đó khách lại mua ít hơn mức trung bình 5 kg, và như vậy cứ giảm giá 2000 nghìn /kg thì số khách mua hàng tuần tăng thêm 1 và khi đó khách lại mua nhiều hơn mức trung bình 5 kg. Hỏi người đó phải bán với giá mỗi kg là bao nhiêu để lợi nhuận thu được hàng tuần là lớn nhất, biết rằng người đó phải nộp tổng các loại thuế là 2200 nghìn /kg. (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn)
- A.** 16000 nghìn /kg. **B.** 24000 nghìn /kg. **C.** 22000 nghìn /kg. **D.** 12000 nghìn /kg.

Lời giải

Gọi $2000x$ nghìn /kg là mức giá thay đổi tăng hoặc giảm so với giá bán bình quân.

Giá bán sau khi thay đổi là $20000 + 2000x$ nghìn /kg.

Số lượng người mua sau khi thay đổi giá là $90 - x$.

Khối lượng khách mua trung bình sau khi giảm giá là $60 - 5x$ kg.

Số tiền thuế phải nộp sau khi thay đổi giá: $2200(90 - x)(60 - 5x)$.

Số tiền thu được sau khi thay đổi giá là

$$T(x) = (90 - x)(60 - 5x)(20000 + 2000x) - 2200(90 - x)(60 - 5x)$$

$$= (17800 + 2000x)(90 - x)(60 - 5x) = (10x^3 - 931x^2 + 1722x + 96120) \cdot 1000.$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \leq 90 \\ x \leq 12 \\ x \geq 8,9 \end{cases} \Leftrightarrow 8,9 \leq x \leq 12.$$

Ta có $T'(x) = (30x^2 - 1862x + 1722) \cdot 1000$.

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow 15x^2 - 931x + 861 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x \approx 0,94 (N) \\ x \approx 61,13 (L) \end{cases}.$$

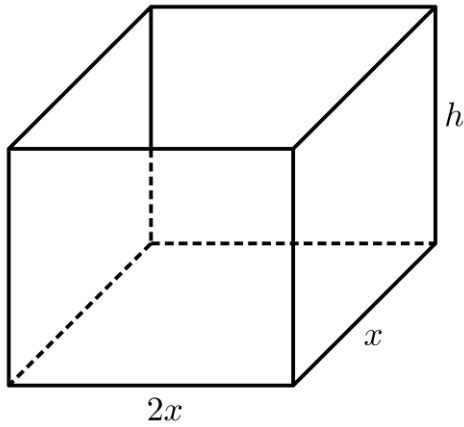
$$T\left(\frac{89}{10}\right) = T(12) = 0, \quad T(0,94) = 96924000$$

Do đó $x \approx 1$ thì lợi nhuận cao nhất.

Do đó giá bán tốt nhất là 22000 nghìn /kg.

- Câu 36.** Ông A dự định sử dụng hết $6,5 \text{ m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?
- A.** $2,26 \text{ m}^3$. **B.** $1,61 \text{ m}^3$. **C.** $1,33 \text{ m}^3$. **D.** $1,50 \text{ m}^3$.

Lời giải



Giả sử bể cá có kích thước như hình vẽ.

$$\text{Ta có: } 2x^2 + 2xh + 4xh = 6,5 \Leftrightarrow h = \frac{6,5 - 2x^2}{6x}.$$

$$\text{Do } h > 0, x > 0 \text{ nên } 6,5 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Lại có } V = 2x^2h = \frac{6,5x - 2x^3}{3} = f(x), \text{ với } x \in \left(0; \frac{\sqrt{13}}{2}\right).$$

$$f'(x) = \frac{13}{6} - 2x^2, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{39}}{6}.$$

x	0	$\frac{\sqrt{39}}{6}$	$\frac{\sqrt{13}}{2}$
f'	+	0	-
f		$\frac{13\sqrt{39}}{54}$	

$$\text{Vậy } V \leq f\left(\frac{\sqrt{39}}{6}\right) = \frac{13\sqrt{39}}{54} \approx 1,50 \text{ m}^3.$$

Câu 37. Ông A dự định sử dụng hết $6,7 \text{ m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A. $1,57 \text{ m}^3$.

B. $1,1 \text{ m}^3$.

C. $1,23 \text{ m}^3$.

D. $2,48 \text{ m}^3$.

Lời giải

Gọi x là chiều rộng, ta có chiều dài là $2x$

$$\text{Do diện tích đáy và các mặt bên là } 6,7 \text{ m}^2 \text{ nên có chiều cao } h = \frac{6,7 - 2x^2}{6x},$$

$$\text{ta có } h > 0 \text{ nên } x < \sqrt{\frac{6,7}{2}}.$$

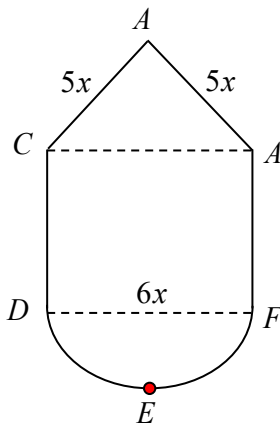
Thể tích bể cá là $V(x) = \frac{6,7x - 2x^3}{3}$ và $V'(x) = \frac{6,7 - 6x^2}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{6,7}{6}}$

Bảng biến thiên

x	0	$\sqrt{\frac{6,7}{6}}$	$\sqrt{\frac{6,7}{2}}$	
y'		+	0	-
y	0	$1,57m^3$	0	

Bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,57m^3$.

Câu 38. Một đoạn dây thép dài 150 cm được uốn thành khung có dạng như hình vẽ.



Khi x thay đổi, tìm x để diện tích hình phẳng thu được đạt giá trị lớn nhất.

- A.** $\frac{25}{4 + \pi}$ cm. **B.** $\frac{100}{4 + \pi}$ cm. **C.** $\frac{10}{4 + \pi}$ cm. **D.** $\frac{50}{4 + \pi}$ cm.

Lời giải

Đặt $CD = y$.

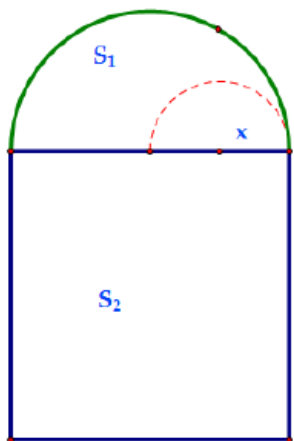
Ta có $10x + 2y + \pi \cdot 3x = 150 \Rightarrow 2y = 150 - 10x + 3\pi x$.

$$S = S_{ABC} + S_{BCDF} + S_{DFE} = 12x^2 + 6xy + \frac{\pi 9x^2}{2} = 12x^2 + 3x(150 - 10x + 3\pi x) + \frac{9\pi x^2}{2} = f(x).$$

$$f'(x) = 450 - (36 + 9\pi)x = 0 \Rightarrow x = \frac{50}{4 + \pi} \text{ cm}.$$

Vậy diện tích hình phẳng thu được đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{50}{4 + \pi}$ cm.

Câu 39. Cần phải làm cái cửa sổ mà phía trên là hình bán nguyệt, phía dưới là hình chữ nhật, có chu vi là a mét (a chính là chu vi hình bán nguyệt cộng với chu vi hình chữ nhật trừ đi đường kính của hình bán nguyệt). Gọi d là đường kính của hình bán nguyệt. Hãy xác định d để diện tích cửa sổ là lớn nhất.



A. $d = \frac{a}{2 + \pi}.$

B. $d = \frac{a}{4 + \pi}.$

C. $d = \frac{2a}{2 + \pi}.$

D. $d = \frac{2a}{4 + \pi}.$

Bài giải

Chu vi của hình bán nguyệt (không tính đường kính) là $\frac{d\pi}{2}$ (m).

Chu vi hình chữ nhật là: $a - \frac{d\pi}{2} + d$ (m).

Hình chữ nhật có kích thước là d , kích thước còn lại là

$$\frac{a - \frac{d\pi}{2} + d}{2} - d = \frac{a - \frac{d\pi}{2} + d - 2d}{2} = \frac{a - \frac{d\pi}{2} - d}{2}$$

Diện tích hình chữ nhật là $d \cdot \frac{a - \frac{d\pi}{2} - d}{2} = \frac{1}{2} \left(ad - \frac{d^2\pi}{2} - d^2 \right) (m^2)$

Diện tích hình bán nguyệt là $\frac{\pi \cdot (d/2)^2}{2} = \pi \cdot \frac{d^2}{8} (m^2)$

Tổng diện tích của số là

$$\frac{1}{2} \left(ad - \frac{d^2\pi}{2} - d^2 \right) + \frac{\pi d^2}{8} = \frac{ad}{2} - \frac{d^2\pi}{4} - \frac{d^2}{2} + \frac{\pi d^2}{8} = \frac{ad}{2} - \frac{\pi d^2}{8} - \frac{d^2}{2} (m^2)$$

Xét hàm $y = \frac{ad}{2} - \frac{\pi d^2}{8} - \frac{d^2}{2}$

có $y' = \frac{a}{2} - \frac{\pi d}{4} - d$ và $y' = 0 \Leftrightarrow d = \frac{2a}{4 + \pi}$

Lập BBT ta thấy y min $\Leftrightarrow d = \frac{2a}{4 + \pi}.$

Câu 40. Bác Tôm có một cái ao có diện tích $50m^2$ để nuôi cá. Vụ vừa qua bác nuôi với mật độ 20 con/ m^2 và thu được tất cả 1,5 tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá thu được bác ấy cứ giảm đi 8 con/ m^2 thì tương ứng sẽ có mỗi con cá thành phẩm thu được tăng thêm 0,5kg. Hỏi vụ tới bác phải mua bao nhiêu con cá giống để đạt được tổng khối lượng cá thành phẩm cao nhất? (Giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi).

A. 1100 con.

B. 1000 con.

C. 500 con.

D. 502 con.

Lời giải

Số cá vụ vừa rồi Bác Tôm nuôi là $20 \cdot 50 = 1000$ con.

Vậy trọng lượng mỗi con là 1,5 kg.

Gọi số cá giảm là $8x$ con.

Trọng lượng thu được của vụ tới là: $(1000 - 400x)(1,5 + 0,5x) = -200x^2 - 100x + 1500$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = -\frac{1}{4}$.

Vậy số cá giống ban đầu là 1100 con.

Câu 41. Người ta muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $288m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, tiền chi phí xây bể là 500.000 đồng/ m^2 . Xác định các kích thước của bể hợp lý thì chi phí sẽ thấp nhất. Hỏi chi phí thấp nhất để xây bể là bao nhiêu?

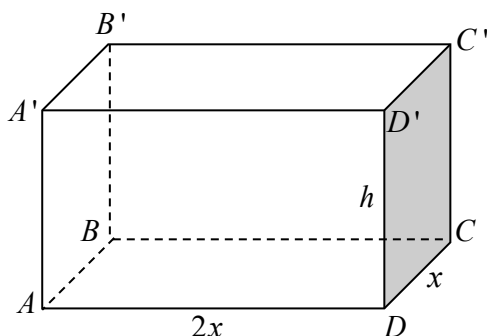
A. 168 triệu đồng.

B. 54 triệu đồng.

C. 108 triệu đồng.

D. 90 triệu đồng.

Lời giải



Gọi chiều rộng của hình chữ nhật là $x, (x > 0)$ và h là chiều cao của hình hộp

$\Rightarrow$ chiều dài của hình chữ nhật là $2x$

Ta có $V = 2x^2h = 288 \Rightarrow h = \frac{144}{x^2}$

Diện tích các mặt cần xây là

$$S(x) = 2x^2 + \frac{864}{x}$$

Chi phí xây bể là $\left(2x^2 + \frac{864}{x}\right)500.000$

Để chi phí thấp nhất thì biểu thức

$$\left(2x^2 + \frac{864}{x}\right)500.000 \text{ đạt GTNN}$$

Xét hàm số $f(x) = 500000\left(2x^2 + \frac{864}{x}\right), (x > 0)$

$$f'(x) = 500000\left(4x - \frac{864}{x^2}\right), (x > 0); f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

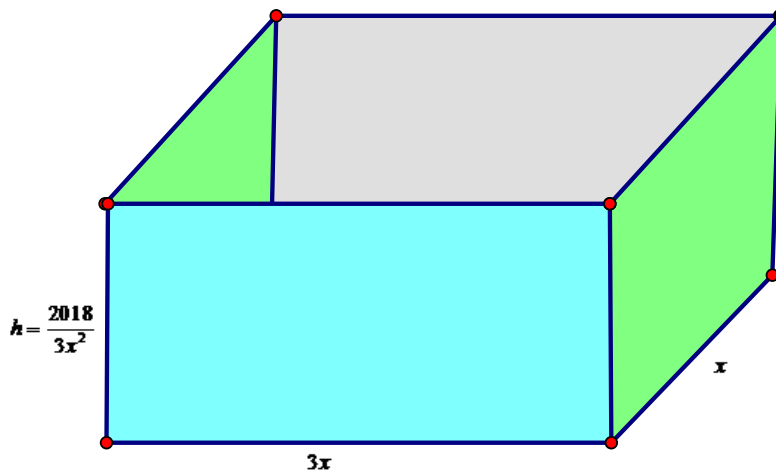
BBT

x	0	6	$+\infty$		
y'		-	0	+	
					$+\infty$

Câu 42. Gia đình ông An xây một bể nước dạng hình hộp chữ nhật có nắp dung tích là 2018 lít, đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng được làm bằng bê tông có giá 250.000 đồng/ m^2 , thân bể được xây bằng gạch có giá 200.000 đồng/ m^2 và nắp bể được làm bằng tôn có giá 100.000 đồng/ m^2 . Hỏi chi phí thấp nhất gia đình ông An bỏ ra để xây bể nước là bao nhiêu ? (làm tròn đến hàng đơn vị).

A. 2.017.000 đồng. **B.** 2.017.331 đồng. **C.** 2.017.333 đồng. **D.** 2.017.334 đồng.

Lời giải



Đổi 2018 (lít) = $2,018 m^3$.

Gọi chiều cao của hình hộp là h , chiều rộng là x , chiều dài là $3x$.

Theo giả thiết ta có $V = x.3x.h = 2,018 \Rightarrow h = \frac{2,018}{3x^2}$.

Xét hàm số $f(x) = 250.x.3x + 200.\left(2.3x.\frac{2,018}{3x^2} + 2.x.\frac{2,018}{3x^2}\right) + 100.3x.x$

$= \frac{15750x^3 + 16144}{15x} \rightarrow \min$.

Suy ra $f'(x) = \frac{15750.3.x^2.15x - 15(15750x^3 + 16144)}{(15x)^2} = \frac{472500x^3 - 242160}{225x^2}$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 472500x^3 - 242160 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{242160}{472500}}$.

Vậy chi phí thấp nhất gia đình ông An bỏ ra để xây bể nước là

$\frac{15750.\frac{242160}{472500} + 16144}{15.\sqrt[3]{\frac{242160}{472500}}} \approx 2017.333$ (nghìn) ≈ 2017333 (đồng).

Câu 43. Một người dự định làm một bể chứa nước hình trụ bằng inox có nắp đáy với thể tích 1 (m³). Chi phí mỗi m² đáy là 600 nghìn đồng, mỗi m² nắp là 200 nghìn đồng và mỗi m² mặt bên là 400 nghìn đồng. Hỏi người đó án kính bể là bao nhiêu để chi phí làm bể ít nhất?

- A. $\sqrt[3]{2\pi}$. B. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. C. $\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$. D. $\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$.

Lời giải

Gọi R và h lần lượt là bán kính và chiều cao của bể chứa nước.

Ta có thể tích bể chứa nước là: $V = 1 \Rightarrow \pi R^2 h = 1 \Leftrightarrow h = \frac{1}{\pi R^2}$.

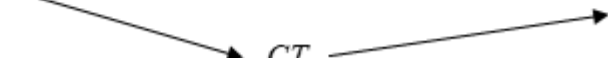
Diện tích nắp và mặt đáy bể chứa nước là: $S_1 = \pi R^2$.

Diện tích xung quanh của bể chứa nước là: $S_2 = 2\pi R h = 2\pi R \cdot \frac{1}{\pi R^2} = \frac{2}{R}$.

Chi phí làm bể chứa nước là: $f(R) = 6\pi R^2 + 2\pi R^2 + 4 \cdot \frac{2}{R} = 8\pi R^2 + \frac{8}{R}$ (trăm nghìn đồng).

Ta có: $f'(R) = 16\pi R - \frac{8}{R^2}$. Xét $f'(R) = 0 \Leftrightarrow 16\pi R - \frac{8}{R^2} = 0 \Leftrightarrow 2\pi R^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$.

Bảng biến thiên:

R	0	$\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$	$+\infty$
$f'(R)$	-	0	+
$f(R)$			

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy chi phí làm bể chứa nước thấp nhất khi $R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$.

PHẦN II. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức

$$f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5} \quad (f(t) \text{ được tính bằng nghìn người}).$$



- a) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1980 là 18 nghìn người.
b) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1995 là 23 nghìn người.
c) Xem f là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Vậy hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$.
d) Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm).

Vào năm 1998 thì tốc độ tăng dân số là 0,125 nghìn người/năm

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Vào đầu năm 1980, ta có $t = 10$; $f(10) = 18$.

Vậy số dân của thị trấn vào đầu năm 1980 là 18 nghìn người.

- Vào đầu năm 1995, ta có $t = 25$; $f(25) = 22$.

Số dân của thị trấn vào đầu năm 1995 là 22 nghìn người.

b) $f'(t) = \frac{120}{(t+5)^2}$ với mọi $t > 0$; $f(t)$ liên tục trên $[0; +\infty)$ (vì liên tục trên khoảng $(-5; +\infty)$)

Vậy hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$.

c) Tốc độ tăng dân số vào đầu năm 1990 là: $f'(20) = \frac{120}{25^2} = 0,192$ (do $t = 1990 - 1970 = 20$).

- Tốc độ tăng dân số được dự kiến vào năm 2008 của thị trấn là:

$$f'(38) = \frac{120}{43^2} \approx 0,065 \text{ (do } t = 2008 - 1970 = 38).$$

- Ta có

$$f'(t) = 0,125 \Leftrightarrow \frac{120}{(t+5)^2} = 0,125 \Leftrightarrow t+5 = \sqrt{\frac{120}{0,125}} \approx 31$$

$$\Rightarrow t \approx 26.$$

d) Vậy vào năm 1996, tốc độ tăng dân số của thị trấn là 0,125.

Câu 2. Dân số của một quốc gia sau t (năm) kể từ năm 2023 được ước tính bởi công thức:

$$N(t) = 100e^{0,012t} \text{ (} N(t) \text{ được tính bằng triệu người, } 0 \leq t \leq 50 \text{)}$$

a) Dân số của quốc gia vào năm 2030 là: 108,763 (triệu người)

b) Dân số của quốc gia vào năm 2035 là: 125,488 (triệu người)

c) Xem $N(t)$ là hàm số của biến số t xác định trên đoạn $[0; 50]$. Khi đó hàm số $N(t)$ đồng biến trên đoạn $[0; 50]$.

d) Đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/năm). Vậy vào năm 2040 thì tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Dân số của quốc gia vào năm 2030 là: $N(7) = 100e^{0,012 \cdot 7} = 100e^{0,084} = 108,763$ (triệu người)

b) Dân số của quốc gia vào năm 2035 là: $N(12) = 100e^{0,012 \cdot 12} = 100e^{0,144} = 125,488$ (triệu người)

c) Trên đoạn $[0; 50]$ ta có: $N'(t) = 0,012 \cdot 100e^{0,012t} = 1,2e^{0,012t} > 0, \forall t \in [0; 50]$

Do đó, hàm số $N(t)$ đồng biến trên đoạn $[0; 50]$.

d) Ta có: $N'(t) = 1,2e^{0,012t}$

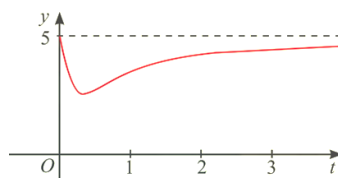
Với tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm ta có:

$$1,6 = 1,2e^{0,012t} \Leftrightarrow e^{0,012t} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow t = \frac{250 \ln \frac{4}{3}}{3} \approx 23,97$$

Vậy vào năm 2046 thì tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/ năm.

Câu 3. Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ ($t \geq 0$) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số (có đồ thị như đường màu đỏ ở hình bên)

$$y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}.$$



- a) Vào thời điểm $t = 1$ thì nồng độ oxygen trong nước là 3,5 (mg/l)
- b) Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước không vượt quá 5 (mg/l)
- c) Vào thời điểm $t = 0$ thì nồng độ oxygen trong nước cao nhất
- d) Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước thấp nhất là 3,5 (mg/l)

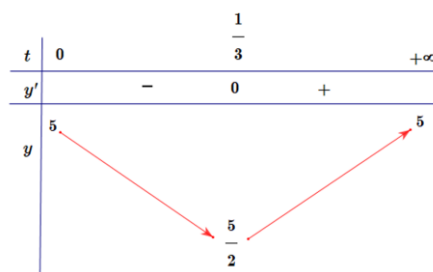
Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
----------------	----------------	----------------	---------------

Xét $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$ trên nửa đoạn $[0; +\infty)$

$$y'(t) = \frac{135t^2 - 15}{(9t^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = -\frac{1}{3} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên, ta thấy $\min_{[0; +\infty)} y(t) = y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{2}$ và $\max_{[0; +\infty)} y(t) = y(0) = 5$

Vậy vào các thời điểm $t = 0$ thì nồng độ oxygen trong nước cao nhất và $t = \frac{1}{3}$ giờ thì nồng độ oxygen trong nước thấp nhất

Câu 4. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox . Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $a(t)$.

a) Hàm $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$

b) Hàm $a(t) = 6t - 12$

c) Trong khoảng từ $t = 0$ đến $t = 2$ thì vận tốc của chất điểm tăng

d) Từ $t = 2$ trở đi thì vận tốc của chất điểm giảm

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

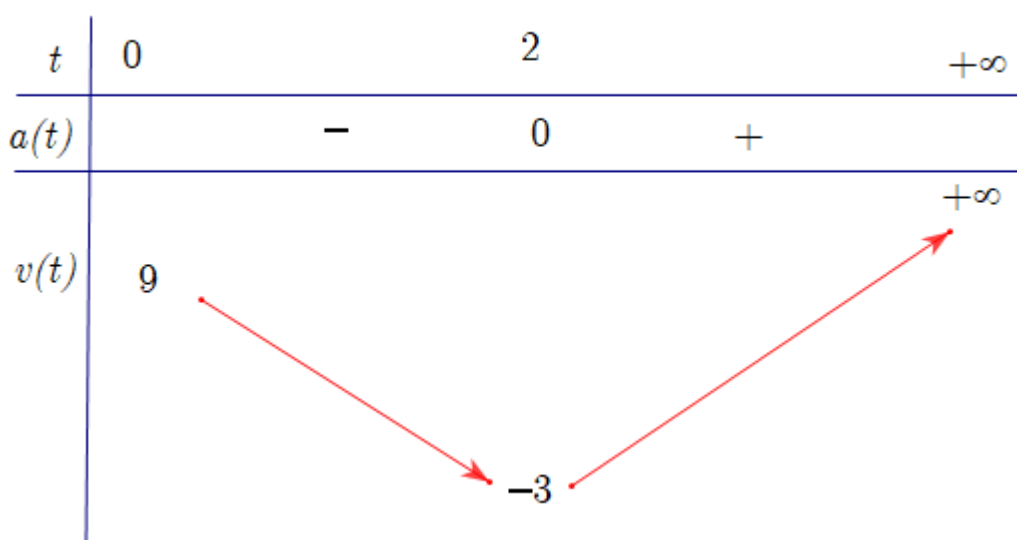
a) Hàm $v(t) = x'(t) = 3t^2 - 12t + 9$

b) Hàm $a(t) = v'(t) = 6t - 12$

b) Tập xác định: $D = [0; +\infty]$

$a(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Bảng biến thiên:



Vậy trong khoảng từ $t = 0$ đến $t = 2$ thì vận tốc của chất điểm giảm, từ $t = 2$ trở đi thì vận tốc của chất điểm tăng

Câu 5. Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho toạ độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y = t^3 - 12t + 3, t \geq 0$.

a) Hàm vận tốc là: $v(t) = 3t^2 - 12, t \geq 0$

b) Hạt chuyển động xuống dưới khi $t > 2$

c) Quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 3$ là $9m$

d) Khi $t > 0$ thì hạt tăng tốc

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Hàm vận tốc là: $v(t) = y' = 3t^2 - 12, t \geq 0$

Hàm gia tốc là: $a(t) = v'(t) = y'' = 6t, t \geq 0$

b) Hạt chuyển động lên trên khi $v(t) > 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 12 > 0 \Leftrightarrow t > 2$ (do $t \geq 0$)

Hạt chuyển động xuống dưới khi $v(t) < 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 12 < 0 \Leftrightarrow 0 \leq t < 2$ (do $t \geq 0$)

c) Ta có: $y(3) - y(0) = 3^3 - 12 \cdot 3 + 3 - 3 = -9$

Vậy quãng đường vật đi được trong thời gian $0 \leq t \leq 3$ là $9m$.

d) Hạt tăng tốc khi $v(t)$ tăng hay $v'(t) > 0$. Do đó, $6t > 0 \Leftrightarrow t > 0$

Hạt giảm tốc khi $v(t)$ giảm hay $v'(t) < 0 \Leftrightarrow 6t < 0 \Leftrightarrow t < 0$ (không thỏa mãn do $t \geq 0$)

Câu 6. Một nhà sản xuất trung bình bán được 1000 ti vi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 14 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng, số lượng ti vi bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 ti vi mỗi tuần.

a) Gọi p (triệu đồng) là giá của mỗi ti vi, x là số ti vi. Vậy hàm cầu là: $p(x) = -\frac{1}{200}x + 19$

b) Công ty giảm giá 4,5 (triệu đồng)/1 tivi cho người mua thì doanh thu của công ty là lớn nhất

c) Nếu hàm chi phí hằng tuần là $C(x) = 12000 - 3x$ (triệu đồng), trong đó x là số ti vi bán ra trong tuần, vậy có 2300 ti vi được bán ra thì lợi nhuận là cao nhất.

d) Nếu hàm chi phí hằng tuần là $C(x) = 12000 - 3x$ (triệu đồng), trong đó x là số ti vi bán ra trong tuần, nhà sản xuất nên đặt giá bán 8,5 triệu đồng/1 ti vi để lợi nhuận là lớn nhất

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

a) Gọi p (triệu đồng) là giá của mỗi ti vi, x là số ti vi. Khi đó, hàm cầu là $p = p(x)$.

Theo giả thiết, tốc độ thay đổi của x tỉ lệ với tốc độ thay đổi của p nên hàm số $p = p(x)$ là hàm số bậc nhất nên. Do đó, $p(x) = ax + b$ (a khác 0).

Giá tiền $p_1 = 14$ ứng với $x_1 = 1000$, giá tiền $p_2 = 13,5$ ứng với $x_2 = 1000 + 100 = 1100$

Do đó, phương trình đường thẳng $p(x) = ax + b$ đi qua hai điểm $(1000; 14)$ và $(1100; 13,5)$. Ta

$$\text{có hệ phương trình: } \begin{cases} 14 = 1000a + b \\ 13,5 = 1100a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{200} \text{ (thỏa mãn)} \\ b = 19 \end{cases}$$

Vậy hàm cầu là: $p(x) = -\frac{1}{200}x + 19$

b) Vì $p = -\frac{1}{200}x + 19 \Rightarrow x = -200p + 3800$

Hàm doanh thu từ tiền bán ti vi là: $R(p) = px = p(-200p + 3800) = -200p^2 + 3800p$

Để doanh thu là lớn nhất thì ta cần tìm p sao cho R đạt giá trị lớn nhất.

Ta có: $R'(p) = -400p + 3800, R'(p) = 0 \Leftrightarrow p = \frac{19}{2}$

Bảng biến thiên:

		$\frac{19}{2}$	
p	0	2	$+\infty$
$R'(p)$		0	
$R(p)$	0	18050	$-\infty$

Vậy công ty nên giảm giá số tiền một chiếc ti vi là: $14 - \frac{19}{2} = 4,5$ (triệu đồng) thì doanh thu là lớn nhất.

c) Doanh thu bán hàng của x sản phẩm là: $R(x) = x \cdot p(x) = x \cdot \left(\frac{-1}{200}x + 19 \right) = \frac{-x^2}{200} + 19x$ (triệu đồng)

Do đó, hàm số thể hiện lợi nhuận thu được khi bán x sản phẩm là:

$$P(x) = R(x) - C(x) = \frac{-x^2}{200} + 19x - 12000 + 3x = \frac{-x^2}{200} + 22x - 12000 \text{ (triệu đồng).}$$

Để lợi nhuận là lớn nhất thì $P(x)$ là lớn nhất.

Ta có: $P'(x) = \frac{-x}{100} + 22, P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2200$

Bảng biến thiên:

		2200	
p	0		$+\infty$
$R'(p)$		0	
$R(p)$	0	12200	$-\infty$

c) Vậy có 2200 ti vi được bán ra thì lợi nhuận là cao nhất.

Số ti vi mua tăng lên là: $2200 - 1000 = 1200$ (chiếc)

d) Vậy cửa hàng nên đặt giá bán là: $14 - 0,5 \cdot \frac{1200}{100} = 8$ (triệu đồng)

Câu 7. Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($1 \leq x \leq 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

$C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$. Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa.

a) Biểu thức tính $B(x)$ theo x là $B(x) = 220x$ (nghìn đồng).

b) Biểu thức tính $L(x)$ theo x là $L(x) = -x^3 + 3x^2 + 220x - 500$ (nghìn đồng).

c) Hộ làm nghề dệt này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày 10 mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa

d) Lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm có thể đạt được là 1000 nghìn đồng.

Giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

Khi bán x mét vải lụa:

a) - Số tiền thu được là: $B(x) = 220x$ (nghìn đồng).

b) - Lợi nhuận thu được là: $L(x) = B(x) - C(x) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$ (nghìn đồng).

c) d) Hàm số $L(x)$ xác định trên $[1; 18]$.

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

- Đạo hàm $L'(x) = -3x^2 + 6x + 240$; $L'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$ hoặc $x = -8$ (loại).

- Trên khoảng $(1; 10)$, $L'(x) > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng này.

- Trên khoảng $(10; 18)$, $L'(x) < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

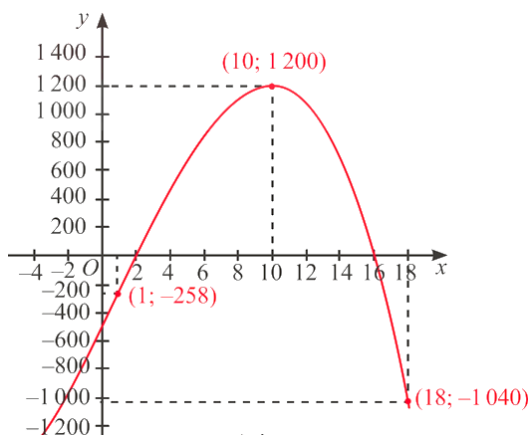
+ Cực trị: Hàm số $L(x)$ đạt cực đại tại $x = 10$ và $L_{CD} = L(10) = 1200$.

+ Bảng biến thiên:

x	1	10	18
$L'(x)$	+	0	-
$L(x)$	-258	1 200	-1 040

- Đồ thị:

Đồ thị hàm số có điểm cực đại $(10; 1200)$ và đi qua các điểm $(1; -258)$, $(18; -1040)$ như Hình.



Quan sát đồ thị hàm số, ta nhận thấy khi $x = 10$ thì hàm số đạt giá trị lớn nhất là 1200. Như vậy, hộ làm nghề dệt cần sản xuất và bán ra mỗi ngày 10 mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa. Lợi nhuận tối đa này là 1200 nghìn đồng.

Câu 8. Giả sử hàm cầu của một sản phẩm độc quyền được cho bởi $P = 400 - 2Q$ và hàm chi phí trung bình $\bar{C} = 0,2Q + 4 + \frac{400}{Q}$ trong đó Q là số đơn vị sản phẩm (P và $\bar{C}$ được tính bằng \$ đối với mỗi đơn vị sản phẩm).

- a) $Q = 90$ là lượng sản phẩm bán ra để lợi nhuận thu được tối đa;
- b) Giá bán để lợi nhuận thu được tối đa là 400\$
- c) Lợi nhuận tối đa là 17420\$
- d) Nếu chính phủ đánh thuế 22\$ / một đơn vị sản phẩm thì giá bán 390\$ để lợi nhuận thu được tối đa

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

Ta có Lợi nhuận = Tổng doanh thu - Tổng chi phí.

Tổng doanh thu là R và tổng chi phí là C được cho bởi $R = PQ = 400Q - 2Q^2$

Và $C = Q\bar{C} = 0,2Q^2 + 4Q + 400$, nên lợi nhuận

$$P = R - C = 400Q - 2Q^2 - (0,2Q^2 + 4Q + 400).$$

$$\text{Hay } P(Q) = 396Q - 2,2Q^2 - 400.$$

a) Để tối đa hóa lợi nhuận, ta cho $P'(Q) = 0 \Leftrightarrow 396 - 4,4Q = 0 \Leftrightarrow Q = 90$.

Ta có $P''(Q) = -4,4 < 0$. Vậy P đạt cực đại tại $Q = 90$.

b) Thay $Q = 90$ vào hàm cầu ta được giá bán trên mỗi sản phẩm để lợi nhuận thu được tối đa: $P = 400 - 2(90) = 220$.

c) Lợi nhuận tối đa $P(90) = 396(90) - 2,2(90)^2 - 400 = 17420$.

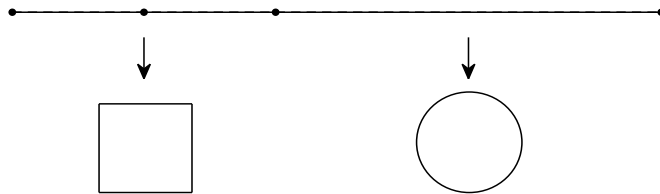
d) Khi chi phí đánh thuế 22\$/một đơn vị sản phẩm, tổng chi phí tăng $22Q$. Hàm chi phí mới là $\bar{C}_1 = 0,2Q^2 + 4Q + 400 + 22Q$ và hàm lợi nhuận mới là

$$P_1 = 400Q - 2Q^2 - (0,2Q^2 + 4Q + 400 + 22Q) \\ = 374Q - 2,2Q^2 - 400.$$

$$\text{Ta có } P_1'(Q) = 0 \Leftrightarrow 374 - 4,4Q = 0 \Leftrightarrow Q = 85.$$

Vì $P_1''(Q) = -4,4 < 0$ nên để thu được lợi nhuận tối đa, nhà độc quyền phải sản xuất 85 đơn vị sản phẩm với mức giá $P_1 = 400 - 2(85) = 230\$$, do mức giá này chỉ hơn 10\$ so với trước đó nên chỉ một phần thuế được tính vào người tiêu dùng, phần thuế còn lại do nhà sản xuất gánh chịu. Lợi nhuận bây giờ là 15495.

Câu 9. Một sợi dây kim loại dài a (cm). Người ta cắt đoạn dây đó thành hai đoạn có độ dài x (cm) được uốn thành đường tròn và đoạn còn lại được uốn thành hình vuông ($a > x > 0$).



a) Bán kính đường tròn: $r = \frac{x}{\pi}$.

b) Diện tích hình vuông: $\left(\frac{a-x}{4}\right)^2$.

c) Tổng diện tích hai hình: $\frac{(4+\pi).x^2 - 2a\pi x + \pi a^2}{16\pi}$.

d) Khi $x = \frac{a\pi}{2+\pi}$ thì hình vuông và hình tròn tương ứng có tổng diện tích nhỏ nhất.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

Do x là độ dài của đoạn dây cuộn thành hình tròn ($0 < x < a$).

Suy ra chiều dài đoạn còn lại là $a - x$.

$$\text{Chu vi đường tròn: } 2\pi r = x \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}.$$

$$\text{Diện tích hình tròn: } S_1 = \pi.r^2 = \frac{x^2}{4\pi}.$$

$$\text{Diện tích hình vuông: } S_2 = \left(\frac{a-x}{4}\right)^2.$$

$$\text{Tổng diện tích hai hình: } S = \frac{x^2}{4\pi} + \left(\frac{a-x}{4}\right)^2 = \frac{(4+\pi).x^2 - 2a\pi x + \pi a^2}{16\pi}.$$

$$\text{Đạo hàm: } S' = \frac{(4+\pi).x - a\pi}{8\pi}; S' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a\pi}{4+\pi}.$$

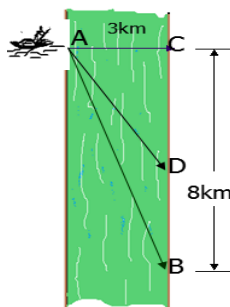
		$\frac{a\pi}{4+\pi}$	
x	0		a
S'	-	0	+
S			

y_{cr}

Suy ra hàm S chỉ có một cực trị và là cực tiểu tại $x = \frac{a\pi}{4+\pi}$.

Do đó S đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{a\pi}{4+\pi}$.

Câu 10. Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hay có thể chèo trực tiếp đến B , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8$ km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông.



Gọi x (km) là độ dài quãng đường BD . Khi đó:

a) $8 - x$ (km) là độ dài quãng đường CD .

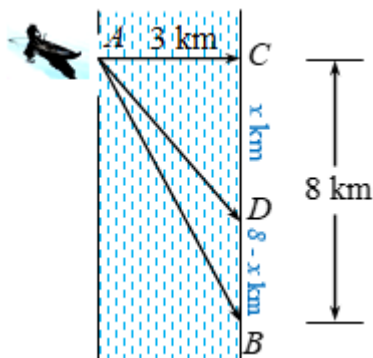
b) Thời gian chèo thuyền trên quãng đường AD là: $\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}$ (giờ)

c) Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $\frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{8-x}{8}$

d) Khoảng 1^h20' là khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B .

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------



Gọi x (km) là độ dài quãng đường BD ; $8-x$ (km) là độ dài quãng đường CD .

Thời gian chèo thuyền trên quãng đường $AD = \sqrt{x^2+9}$ là: $\frac{\sqrt{x^2+9}}{6}$ (giờ)

Thời gian chạy trên quãng đường DB là: $\frac{8-x}{8}$ (giờ)

Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8}$ trên khoảng $(0; 8)$

Ta có $f'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+9} = 4x \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}}$

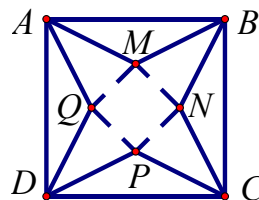
Bảng biến thiên

x	0	$\frac{9}{\sqrt{7}}$	8
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$	$\frac{\sqrt{73}}{6}$

Dựa vào BBT ta thấy thời gian ngắn nhất để di chuyển từ A đến B là $1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1^h 20'$.

Vậy khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B là $1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1^h 20'$.

Câu 11. Từ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $MA^2 = MB^2 + MC^2$, người ta cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau là AMB , BNC , CPD và DQA . Với phần còn lại, người ta gấp lên và ghép lại để thành hình chóp tứ giác đều.



Gọi cạnh đáy của mô hình là x (cm) với $x > 0$. Khi đó :

a) Chiều cao của hình chóp là $\sqrt{1250 - 25\sqrt{2}x}$.

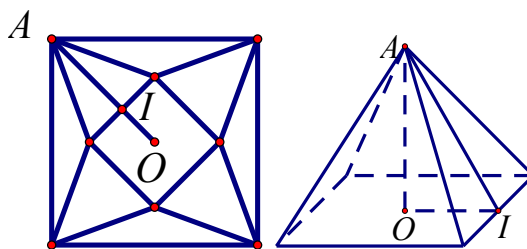
b) Điều kiện của x là: $0 < x < 25\sqrt{2}$

c) Thể tích của khối chóp bằng $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{1250x^3 - 25\sqrt{2}x^4}$.

d) Khi cạnh đáy của khối chóp bằng $3\sqrt{2}\text{dm}$ thì thể tích của khối chóp là lớn nhất

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------



Gọi cạnh đáy của mô hình là x (cm) với $x > 0$. Ta có $AI = AO - IO = 25\sqrt{2} - \frac{x}{2}$.

Chiều cao của hình chóp $h = \sqrt{AI^2 - OI^2} = \sqrt{\left(25\sqrt{2} - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{1250 - 25\sqrt{2}x}$.

Thể tích của khối chóp bằng $V = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \sqrt{1250 - 25\sqrt{2}x} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1250x^4 - 25\sqrt{2}x^5}$.

Điều kiện $1250 - 25\sqrt{2}x > 0 \Rightarrow x < 25\sqrt{2}$.

Xét hàm số $y = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1250x^4 - 25\sqrt{2}x^5}$ với $0 < x < 25\sqrt{2}$.

Ta có $y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{5000x^3 - 125\sqrt{2}x^4}{2\sqrt{1250x^4 - 25\sqrt{2}x^5}}$.

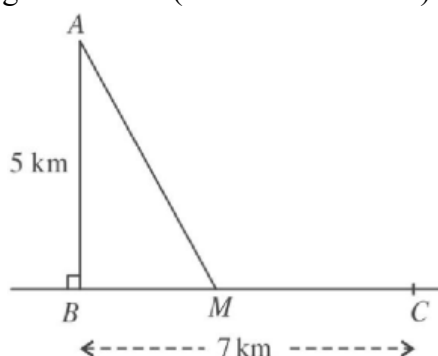
Có $y' = 0 \Rightarrow 5000x^3 - 125\sqrt{2}x^4 = 0 \Rightarrow x = 20\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên

x	0	$20\sqrt{2}$	$25\sqrt{2}$
y'	+	0	-
y	0	$\frac{4000\sqrt{10}}{3}$	0

Vậy để mô hình có thể tích lớn nhất thì cạnh đáy của mô hình bằng $20\sqrt{2}\text{ cm} = 2\sqrt{2}\text{ dm}$.

Câu 12. Một ngọn hải đăng được đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 5\text{ km}$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng $BC = 7\text{ km}$ (tham khảo hình vẽ).



Người canh hải đăng có thể chèo đò từ vị trí A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc 4km/h và đi bộ đến kho C với vận tốc 6km/h .

Đặt $BM = x$ với $0 < x < 7$. Khi đó:

a) Thời gian đi từ A đến M là $\frac{\sqrt{25+x^2}}{4}$.

b) Thời gian đi từ A đến C là $\frac{\sqrt{25+x^2}}{4} + \frac{7-x}{6}$.

c) Thời gian ngắn nhất từ A đến C là khoảng $3\text{h } 06$ phút.

d) Muộn nhất $3\text{h } 54$ phút người đó phải xuất phát từ vị trí A để có mặt tại kho C lúc 7 giờ sáng

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

Thời gian đi từ A đến M là $\frac{\sqrt{25+x^2}}{4}$.

Thời gian đi từ M đến C là $\frac{7-x}{6}$.

Tổng thời gian đi từ A đến C là $\frac{\sqrt{25+x^2}}{4} + \frac{7-x}{6}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{25+x^2}}{4} + \frac{7-x}{6}$.

Ta có $f'(x) = \frac{x}{4\sqrt{25+x^2}} - \frac{1}{6}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{4\sqrt{25+x^2}} - \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{25+x^2} = 3x \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}$.

Bảng biến thiên

x	0	$2\sqrt{5}$	7	
$f'(x)$		–	0	+
$f(x)$			$\frac{14+5\sqrt{5}}{12}$	

Thời gian ngắn nhất là $t = \frac{14+5\sqrt{5}}{12} = 2,098 \Rightarrow t \approx 2\text{h } 06$ phút.

Vậy người đó xuất phát muộn nhất lúc $4\text{h } 54$ phút.

Câu 13. Ông Nam cần xây dựng một bể chứa nước có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp đậy để phục vụ cho việc tưới cây trong vườn. Do các điều kiện về diện tích vườn, ông Nam cần bể có thể tích là 36m^3 , đáy bể có chiều dài gấp hai lần chiều rộng và chiều rộng không quá 4m , biết rằng chi phí vật liệu xây dựng mỗi mét vuông diện tích bề mặt là như nhau.

Gọi $x(\text{m})$ là chiều rộng của bể, ta có $0 < x \leq 4$. Khi đó

a) Chiều dài của bể là $2x(\text{m})$

b) Chiều cao của bể là $\frac{18}{x^2}(\text{m})$.

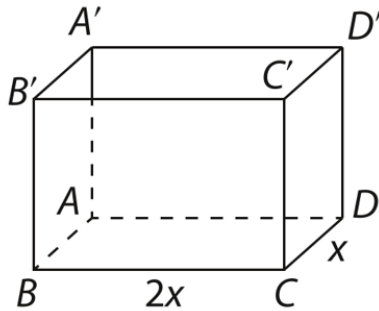
c) Tổng diện tích các mặt cần xây là: $2x^2 + \frac{108}{x}$.

d) Chiều cao bể nước bằng 3(m) thì tổng chi phí vật liệu là nhỏ nhất

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
----------------	----------------	----------------	---------------

Xem bể chứa có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ như Hình.



Chiều dài của bể là $2x(m)$.

Gọi $h(m)$ là chiều cao bể nước, ta có thể tích của bể là $V = x \cdot (2x) \cdot h$.

$$\text{Suy ra } h = \frac{V}{2x^2} = \frac{36}{2x^2} = \frac{18}{x^2}(m).$$

Tổng diện tích các mặt cần xây là:

$$\begin{aligned} S &= S_{ABCD} + 2 \cdot S_{ABB'A'} + 2 \cdot S_{BCC'B'} \\ &= 2x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{18}{x^2} + 2 \cdot 2x \cdot \frac{18}{x^2} = 2x^2 + \frac{108}{x}. \end{aligned}$$

Xét hàm số $S(x) = 2x^2 + \frac{108}{x} (0 < x \leq 4)$, ta có:

$$S'(x) = 4x - \frac{108}{x^2} = \frac{4x^3 - 108}{x^2} = \frac{4(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{x^2}.$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Do $x^2 > 0$ và $x^2 + 3x + 9 > 0$ khi $x \in (0; 4]$ nên dấu của $S'(x)$ trên $(0; 4]$ phụ thuộc dấu của biểu thức $x - 3$.

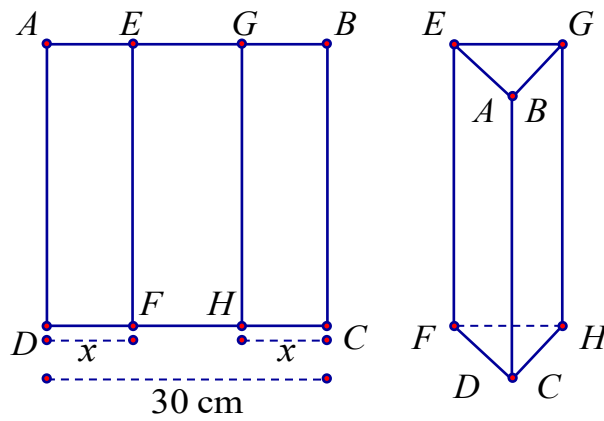
Bảng biến thiên:

x	0	3	4
$S'(x)$	-	0	+
$S(x)$			

Chi phí vật liệu xây dựng thấp nhất khi tổng diện tích các mặt cần xây $S(x)$ là nhỏ nhất. Dựa vào bảng biến thiên, ta có $S(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 3$, suy ra $h = 2$.

Vậy cần xây bể có chiều cao là 2(m).

Câu 14. Một tấm kẽm hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 30 cm. Người ta gấp tấm kẽm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy.



Khi đó:

a) Thể tích khối trụ được tính bằng công thức $V = 30S$ trong đó S là diện tích của tam giác AEG

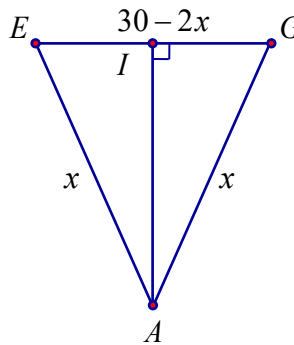
b) Diện tích của tam giác AEG bằng: $\sqrt{30} \cdot \sqrt{(15-x)^2 (2x-15)}$

c) Giá trị của x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là $x = 10$ (cm)

d) Thể tích khối lăng trụ lớn nhất bằng 1250

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

Lời giải



Đường cao lăng trụ là $AD = AB = 30$ cm không đổi. Để thể tích lăng trụ lớn nhất chỉ cần diện tích đáy lớn nhất.

Gọi I là trung điểm cạnh $EG \Rightarrow AI \perp EG$ trong tam giác AEG .

Khi đó $IG = 15 - x$, ($0 < x < 15$)

$$\text{Có } AI = \sqrt{x^2 - \left(\frac{30-2x}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - (15-x)^2} = \sqrt{30x-225}, x \in \left(\frac{15}{2}; 15\right).$$

$$S_{\triangle AEG} = \frac{1}{2} AI \cdot EG = \frac{1}{2} (30-2x) \sqrt{30x-225} = \sqrt{15} \cdot \sqrt{(15-x)^2 (2x-15)}$$

Vậy ta cần tìm $x \in \left(\frac{15}{2}; 15\right)$ để $f(x) = (15-x)^2 (2x-15)$ lớn nhất.

$$f'(x) = -2(15-x)(2x-15) + 2(15-x)^2 = 2(15-x)(30-3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ x = 10 \end{cases}$$

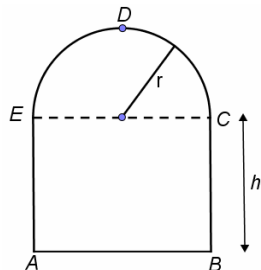
Bảng biến thiên:

x	$\frac{15}{2}$	10	15
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	125	0

Vậy thể tích lăng trụ lớn nhất khi $x = 10$.

Và thể tích lớn nhất bằng $125.30 = 3750 (cm^3)$

Câu 15. Bác thợ hàn dùng một thanh kim loại dài 250 cm để uốn thành khung cửa sổ có dạng như hình vẽ. Gọi r là bán kính của nửa đường tròn,



a) Diện tích của nửa hình tròn là $S_1 = \frac{1}{2} \pi r^2$

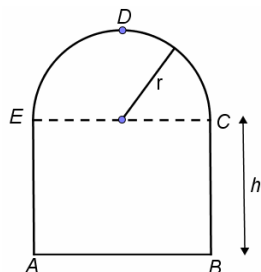
b) Diện tích của hình chữ nhật là $S_2 = 250r - \pi r^2 - 2r^2$

c) Khi $r = 10$ thì giá trị diện tích của khung cửa sổ nằm trong khoảng $(2000; 2140)$

d) Biết $r = r_0$ thì diện tích tạo thành đạt giá trị lớn nhất khi đó $r_0 \in (35; 36)$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------



* Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của nửa hình tròn và hình chữ nhật. Khi đó:

$$S_1 = \frac{1}{2} \pi r^2; S_2 = 2rh; \text{ với } 2h = 250 - (\pi r + 2r) \text{ nên } S_2 = 250r - \pi r^2 - 2r^2.$$

* Suy ra diện tích hình cần tìm $S = \frac{1}{2} \pi r^2 + 250r - \pi r^2 - 2r^2 = -\frac{1}{2} \pi r^2 - 2r^2 + 250r$.

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $S(r) = -\frac{1}{2} \pi r^2 - 2r^2 + 250r$ với $0 < r < 125$.

* Ta có $S'(r) = -(\pi + 4)r + 250$; $S'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{250}{\pi + 4}$. Đây là cực trị duy nhất của hàm số

đồng thời $S'(r)$ đổi dấu từ dương sang âm khi r qua $\frac{250}{\pi + 4}$ nên hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm này.

PHẦN E. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$ trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?

Trả lời:.....

Lời giải

Ta có: $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t + 1$.

Nhận xét: $v(t)$ có đồ thị là một parabol nên trong 5s đầu tiên vận tốc tức thời của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng 13 tại $t = 2s$.

Câu 2. Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được là $s(t)(km)$ là hàm phụ thuộc theo biến t (giây) tuân theo biểu thức sau: $s(t) = e^{t^2+3} + 2te^{3t+1}(km)$. Hỏi vận tốc của tên lửa sau 1 giây là bao nhiêu (biết hàm biểu thị vận tốc là đạo hàm cấp một của hàm biểu thị quãng đường theo thời gian)?

Trả lời:.....

Lời giải

$$v(t) = s'(t) = 2te^{t^2+3} + 2e^{3t+1} + 6te^{3t+1} \Rightarrow v(1) = 2e^4 + 2e^4 + 6e^4 = 10e^4 (km/s)$$

Câu 3. Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ độ cao $2m$ với vận tốc ban đầu là $24,5m/s$. Trong Vật lý, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí thì độ cao h (mét) của vật sau t (giây) được cho bởi công thức $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$. Hỏi sau bao nhiêu giây thì vật đạt độ cao lớn nhất?

Trả lời:.....

Lời giải

Xét hàm số: $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } h'(t) = -9,8t + 24,5; h'(t) = 0 \Leftrightarrow -9,8t + 24,5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$h'(t)$	+	0	-
$h(t)$	$-\infty$	$\frac{261}{8}$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $t = \frac{5}{2}$

Vậy thời điểm vật đạt độ cao lớn nhất là $t = \frac{5}{2}$ giây

Câu 4. Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số

$$f(t) = \frac{5000}{1+5e^{-t}}, t \geq 0, \text{ trong đó thời gian } t \text{ được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới.}$$

Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

Trả lời:.....

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{-5000(1+5e^{-t})'}{(1+5e^{-t})^2} = \frac{25000e^{-t}}{(1+5e^{-t})^2}$$

Tốc độ bán hàng là lớn nhất khi $f'(t)$ lớn nhất.

$$\text{Đặt } h(t) = \frac{25000e^{-t}}{(1+5e^{-t})^2}.$$

$$h'(t) = \frac{-25000e^{-t}(1+5e^{-t})^2 - 2 \cdot (-5e^{-t}) \cdot (1+5e^{-t}) \cdot 25000e^{-t}}{(1+5e^{-t})^4}$$

$$= \frac{-25000e^{-t}(1+5e^{-t})(1+5e^{-t}-10e^{-t})}{(1+5e^{-t})^4} = \frac{-25000e^{-t}(1-5e^{-t})}{(1+5e^{-t})^3}$$

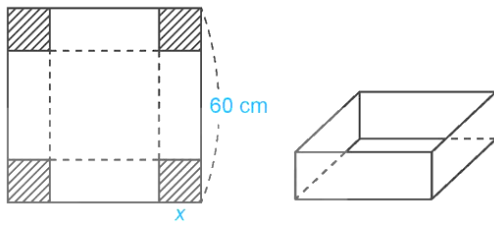
$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-25000e^{-t}(1-5e^{-t})}{(1+5e^{-t})^3} = 0 \Leftrightarrow 1-5e^{-t} = 0 \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow t = \ln 5 (tm)$$

Ta có bảng biến thiên với $t \in [0; +\infty)$:

t	0	$\ln 5$	$+\infty$
$h'(t)$	+	0	-
$h(t)$	$\frac{6250}{9}$	1250	0

Vậy sau khi phát hành khoảng $\ln 5 \approx 1,6$ năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất.

Câu 5. Từ một tấm bìa carton hình vuông có độ dài cạnh bằng 60 cm , người ta cắt bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc rồi gấp thành một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp. Tính cạnh của các hình vuông bị cắt sao cho thể tích của chiếc hộp là lớn nhất.



Trả lời:.....

Lời giải

Gọi $x(cm)$ là độ dài cạnh của các hình vuông nhỏ được cắt ở bốn góc của tấm bìa. Điều kiện: $0 < x < 30$. Khi cắt bỏ bốn hình vuông nhỏ có cạnh $x(cm)$ ở bốn góc và gấp lên thì ta được một chiếc hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông với độ dài cạnh bằng $(60 - 2x)(cm)$ và chiều cao bằng $x(cm)$. Thể tích của chiếc hộp này là

$$V(x) = (60 - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 240x^2 + 3600x \text{ (cm}^3\text{)}$$

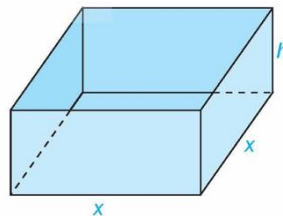
Ta có: $V'(x) = 12x^2 - 480x + 3600$; $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 40x + 300 = 0 \Leftrightarrow x = 10$ (thỏa mãn điều kiện) hoặc $x = 30$ (loại).

Lập bảng biến thiên:

x	0	10	30
$V'(x)$		+	-
$V(x)$	0	16 000	0

Vậy để thể tích của chiếc hộp là lớn nhất thì độ dài cạnh của các hình vuông nhỏ phải cắt là $10cm$.

Câu 6. Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng $108cm^2$ như Hình.



Biết khi $x = x_0$; $h = h_0$ thì thể tích của hộp là lớn nhất. Khi đó $x_0 + h_0$ bằng?

Trả lời:.....

Lời giải

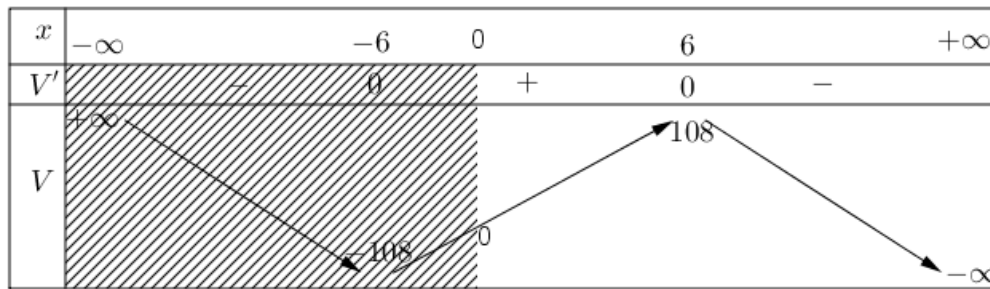
Hình hộp trên có độ dài cạnh đáy là $x(cm, x > 0)$ và chiều cao là $h(cm, h > 0)$

Diện tích bề mặt của hình hộp là $108cm^2$ nên $x^2 + 4xh = 108 \Rightarrow h = \frac{108 - x^2}{4x} (cm)$

Thể tích của hình hộp là: $V = x^2 \cdot h = x^2 \cdot \frac{108 - x^2}{4x} = \frac{108x - x^3}{4} (cm^3)$

Ta có: $V' = \frac{-3x^2 + 108}{4}$, $V' = 0 \Leftrightarrow x = 6$ (do $x > 0$)

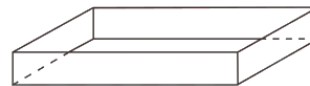
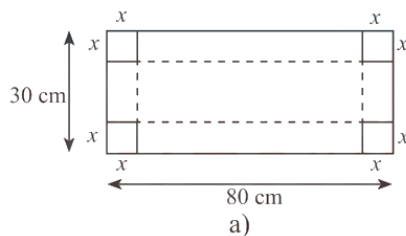
Bảng biến thiên:



Do đó, thể tích của hình hộp là lớn nhất khi độ dài cạnh đáy $x = 6 \text{ cm}$

Khi đó, chiều cao của hình hộp là: $\frac{108 - 6^2}{4.6} = 3(\text{cm})$.

Câu 7. Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 30 cm và chiều dài 80 cm (Hình a), người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh $x(\text{cm})$ với $5 \leq x \leq 10$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp như Hình b, tìm x để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Trả lời:.....

Lời giải

Thể tích chiếc hộp là: $V(x) = x(30 - 2x)(80 - 2x) = 2400x - 220x^2 + 4x^3$ với $5 \leq x \leq 10$.

Ta có: $V'(x) = 12x^2 - 440x + 2400$;

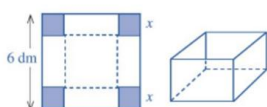
$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{20}{3}$ hoặc $x = 30$ (loại vì không thuộc $[5; 10]$);

$V(5) = 7000$; $V\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{200000}{27}$; $V(10) = 6000$. 17

Do đó $\max_{[5; 10]} V(x) = \frac{200000}{27}$ khi $x = \frac{20}{3}$.

Vậy để thể tích chiếc hộp là lớn nhất thì $x = \frac{20}{3} \text{ cm}$.

Câu 8. Cho một tấm nhôm có dạng hình vuông cạnh 6 dm . Bác Ánh cắt ở bốn góc bốn hình vuông cùng có độ dài bằng $x(\text{dm})$, rồi gấp tấm nhôm lại như Hình để được một cái hộp có dạng khối hộp chữ nhật không có nắp. Gọi V là thể tích của khối hộp đó tính theo x .



Tìm $x(\text{dm})$ để khối hộp tạo thành có thể tích lớn nhất.

Trả lời:.....

Lời giải

Ta thấy độ dài $x(dm)$ của cạnh hình vuông bị cắt phải thỏa mãn điều kiện $0 < x < 3$.

Thể tích của khối hộp là $V(x) = x(6-2x)^2$ với $0 < x < 3$.

Ta phải tìm $x_0 \in (0;3)$ sao cho $V(x_0)$ có giá trị lớn nhất.

Ta có: $V'(x) = (6-2x)^2 - 4x(6-2x)$

$$= (6-2x)(6-6x) = 12(3-x)(1-x).$$

Trên khoảng $(0;3)$, $V'(x) = 0$ khi $x = 1$.

Bảng biến thiên của hàm số $V(x)$ như sau:

x	0	1	3	
$V'(x)$		+	0	-
$V(x)$	0	16	0	

Căn cứ bảng biến thiên, ta thấy: Trên khoảng $(0;3)$, hàm số $V(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 16 tại $x = 1$.

Vậy để khối hộp tạo thành có thể tích lớn nhất thì $x = 1$ (dm).

Câu 9. Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức: $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100+t^2}$ (con), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

Trả lời:.....

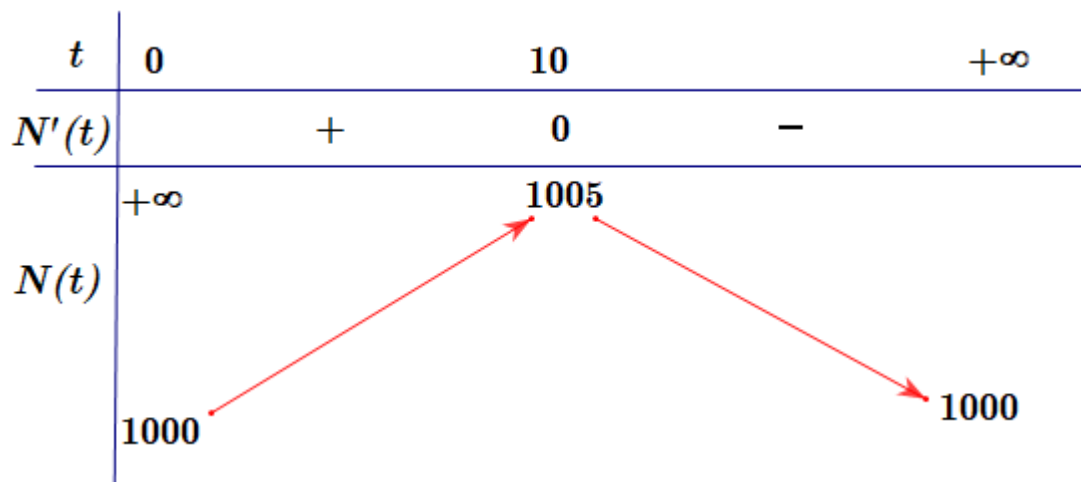
Lời giải

Xét hàm số $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100+t^2}$ ($t > 0$).

$$\text{Ta có: } N'(t) = \frac{100 \cdot (100+t^2) - 100t \cdot 2t}{(100+t^2)^2} = \frac{100 \cdot (100-t^2)}{(100+t^2)^2}.$$

Khi đó, với $t > 0$, $N'(t) = 0 \Leftrightarrow 100 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 100 \Leftrightarrow t = 10$.

Bảng biến thiên của hàm số $N(t)$ như sau:



Căn cứ bảng biến thiên, ta thấy: Trên khoảng $(0; +\infty)$, hàm số $N(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 1005 tại $t = 10$.

Vậy số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng là 1005 con.

Câu 10. Ho ép khí quản co lại, ảnh hưởng đến tốc độ của không khí đi vào khí quản. Tốc độ của không khí đi vào khí quản khi ho được cho bởi công thức

$V = k(R - r)r^2$; $0 \leq r < R$, trong đó k là hằng số, R là bán kính bình thường của khí quản, r là bán kính khí quản khi ho. Hỏi bán kính của khí quản khi ho bằng bao nhiêu so với bán kính khí quản lúc bình thường thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất?

Trả lời:.....

Lời giải

Ta có: $V' = 2kRr - 3kr^2$.

$$\text{Nhận xét } V' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = \frac{2R}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } f(0) = 0; f\left(\frac{2R}{3}\right) = \frac{4kR^3}{27}$$

Vậy bán kính của khí quản khi ho bằng $\frac{2}{3}$ bán kính khí quản lúc bình thường thì tốc độ không khí đi vào là lớn nhất.

Câu 11. Người quản lý của một khu chung cư có 100 căn hộ cho thuê nhận thấy rằng tất cả các căn hộ sẽ có người thuê nếu giá thuê một căn hộ là 8 triệu đồng một tháng. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thuê căn hộ thêm 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Người quản lý nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là bao nhiêu để doanh thu là lớn nhất?

Trả lời:.....

Lời giải

Gọi x là số lần tăng giá 100 nghìn đồng ($x > 0$).

Khi đó, số căn được cho thuê là: $100 - x$ (căn)

Tổng số tiền thu được trong một tháng là:

$$(100-x)(8000000+100000x)=100000(100-x)(80+x)=100000(-x^2+20x+8000) \\ =100000[-(x-10)^2+8100]\leq 810000000, \forall x>0$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=10$ (thỏa mãn)

Vậy để thu được doanh thu là lớn nhất thì người quản lí nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là: $8000000+100000.10=9000000$ (đồng).

Câu 12. Anh Nam có một mảnh đất rộng và muốn dành ra một khu đất hình chữ nhật có diện tích $200m^2$ để trồng vài loại cây mới. Anh dự kiến rào quanh ba cạnh của khu đất hình chữ nhật này bằng lưới thép, cạnh còn lại (chiều dài) sẽ tận dụng bức tường có sẵn (Hình). Do điều kiện địa lí, chiều rộng khu đất không vượt quá 15 m, hỏi chiều rộng của khu đất này bằng bao nhiêu để tổng chiều dài lưới thép cần dùng là ngắn nhất (nghĩa là chi phí rào lưới thép thấp nhất)?



Trả lời:.....

Lời giải

Gọi $x(m)$ là chiều rộng của khu đất hình chữ nhật cần rào.

Theo đề bài, ta có $0 < x \leq 15$.

Diện tích khu đất này là $200(m^2)$ nên chiều dài của khu đất là $\frac{200}{x}(m)$.

Tổng chiều dài lưới thép rào quanh khu đất là $L(x) = 2x + \frac{200}{x}(m)$.

Xét hàm số: $L(x) = 2x + \frac{200}{x}$, với $x \in (0; 15]$.

Ta có: $L'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2}$;

$L'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$ (do $x > 0$).

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2x + \frac{200}{x} \right) = +\infty$;

$L(10) = 40$;

$L(15) = \frac{130}{3}$.

Bảng biến thiên:

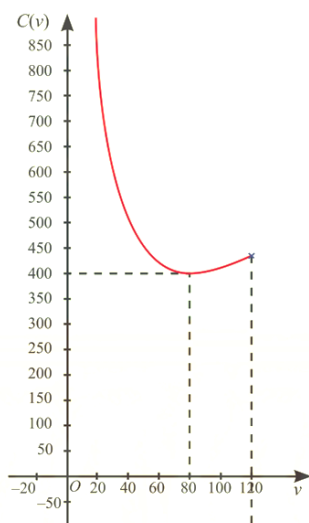
x	0	10	15
$L'(x)$	-	0	+
$L(x)$	$+\infty$	40	$\frac{130}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên, chiều dài lưới thép ngắn nhất là $40m$ khi chiều rộng khu đất này là $x = 10(m)$ (và chiều dài là $\frac{200}{10} = 20(m)$).

Câu 13. Giả sử chi phí tiền xăng C (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình $v(km/h)$ theo công thức:

$$C(v) = \frac{16000}{v} + \frac{5}{2}v \quad (0 < v \leq 120)$$

Để biểu diễn trực quan sự thay đổi của $C(v)$ theo v , người ta đã vẽ đồ thị hàm số $C(v)$ như hình bên.



Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình là bao nhiêu để tiết kiệm tiền xăng nhất?

Trả lời:.....

Lời giải

Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $C(v)$:

- Tập xác định: $D = (0; 120]$.

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

- Đạo hàm $C'(v) = -\frac{16000}{v^2} + \frac{5}{2} = \frac{5(v-80)(v+80)}{2v^2}$; $C'(v) = 0 \Leftrightarrow v = -80$ (loại) hoặc $v = 80$.

- Trên khoảng $(0; 80)$, $C'(v) < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

- Trên khoảng $(80; 120)$, $C'(v) > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng này.

+ Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $v = 80$, $C_{CT} = C(80) = 400$.

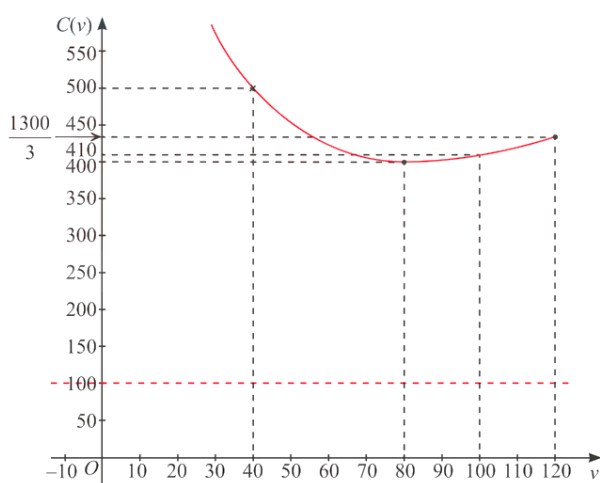
+ Giới hạn vô cực và tiệm cận: $\lim_{v \rightarrow 0^+} C(v) = \lim_{v \rightarrow 0^+} \left(\frac{16000}{v} + \frac{5}{2}v \right) = +\infty$ nên đường thẳng $v = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

+ Bảng biến thiên:

v	0	80	120	
$C'(v)$		-	0	+
$C(v)$	$+\infty$		400	$\frac{1300}{3}$

- Đồ thị:

Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $(80; 400)$ và đi qua các điểm $(40; 500)$, $(100; 410)$, $\left(120; \frac{1300}{3}\right)$ như Hình.



Quan sát đồ thị hàm số, ta nhận thấy hàm số đạt GTNN khi $v = 80$ và GTNN là 400.

Như vậy, để tiết kiệm tiền xăng nhất, tài xế nên chạy xe với tốc độ trung bình là 80 km/h.

Câu 14. Một người nông dân có 15000000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (Hình 35). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.



Trả lời:.....

Lời giải

Gọi độ dài của hàng rào song song sông với bờ sông là $x(m)$ với $x > 0$

Gọi độ dài của mỗi hàng rào trong ba hàng rào song song nhau là $y(m)$ với $y > 0$

Diện tích đất mà bác nông dân rào được là: $xy(m^2)$

Tổng chi phí là 15.000.000 đồng nên ta có phương trình:

$$x60000 + 3y50000 = 15000000 \Rightarrow 6x + 15y = 1500$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có:

$$6x + 15y \geq 2\sqrt{6x \cdot 5y} \Rightarrow 1500 \geq 2\sqrt{90xy} \Rightarrow xy \leq 6250$$

Vậy diện tích lớn nhất mà bác nông dân có thể tạo rào là $6250(m^2)$

Câu 15. Một công ty kinh doanh bất động sản có 20 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng/1 tháng thì tất cả các căn hộ đều có người thuê. Nhưng cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 200 nghìn đồng/1 tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi công ty nên cho thuê mỗi căn hộ bao nhiêu tiền một tháng để tổng số tiền thu được là lớn nhất?

Trả lời:.....

Lời giải

Giả sử giá thuê mỗi căn hộ là (x) triệu đồng/1 tháng và số căn hộ cho thuê là (y) .

Khi đó, tổng số tiền thu được sẽ là (xy) . Theo đề bài, ta có: $y = 20 - 5(x - 2)$ (vì cứ mỗi lần tăng giá thuê mỗi căn hộ thêm 200 nghìn đồng/1 tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống).

Do đó, ta cần tìm giá trị của (x) sao cho hàm số $f(x) = x(20 - 5(x - 2))$ đạt giá trị lớn nhất.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 30 - 10x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 30 - 10x = 0 \rightarrow x = 3$$

Cuối cùng, ta kiểm tra xem điểm cực này có phải là điểm cực đại hay không:

Xác định khoảng: $[-\infty, 3], [3, +\infty]$

$$\text{Chọn } x_1 = 2 \rightarrow f(x) = 10$$

$$\text{Chọn } x_2 = 4 \rightarrow f(x) = -10$$

Vì đạo hàm dương với mọi $x < 3$ là âm với mọi $x > 3 \rightarrow$ hàm số cực đại tại $x = 3$

Vì vậy, công ty nên cho thuê mỗi căn hộ với giá 3 triệu đồng/1 tháng để tổng số tiền thu được là lớn nhất.

Câu 16. Hàm cầu của một sản phẩm có dạng $P = \frac{80 - Q}{4}, 0 \leq Q \leq 80$, trong đó Q là số lượng sản phẩm và P là giá bán của mỗi sản phẩm. Doanh thu tối đa bằng bao nhiêu?

Trả lời:.....

Lời giải

Gọi R là tổng doanh thu. Ta có công thức Doanh thu = (giá bán) $\times$ (số lượng)

Từ đây ta có

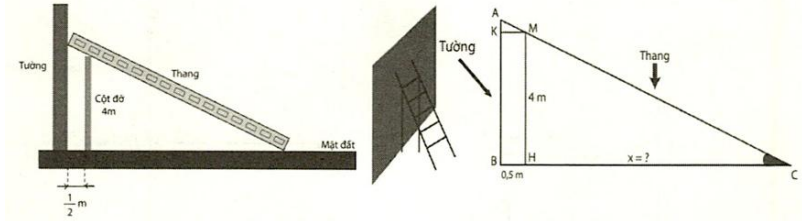
$$R = PQ = \frac{80 - Q}{4} \cdot Q = \frac{80Q - Q^2}{4} = R(Q), \text{ trong đó } 0 \leq Q \leq 80.$$

$$\text{Đạo hàm } R'(Q) = 0 \Leftrightarrow \frac{80-2Q}{4} = 0 \Leftrightarrow Q = 40.$$

Do đó, 40 là giá trị tới hạn duy nhất. Ta nhận thấy hàm R tăng trong $[0; 40)$ và R giảm trong $(40; 80]$. Hay $R(Q)$ đạt giá trị cực đại tại $Q = 40$. Khi đó doanh thu tối đa bằng

$$R(40) = \frac{80 \cdot 40 - 40^2}{4} = 400.$$

Câu 17. Tìm chiều dài bé nhất của cái thang để nó có thể tựa vào tường và mặt đất, ngang qua cột đỡ cao 4m, song song và cách tường 0,5m kể từ góc của cột đỡ như hình vẽ.



Trả lời:.....

Lời giải

Đặt $HC = x > 0$. Suy ra $BC = x + 0,5$.

Áp dụng định lý Thales, ta có $\frac{HC}{BC} = \frac{MH}{AB} = \frac{x}{x + 0,5}$.

$$\text{Vậy } AB = \frac{4(x + 0,5)}{x}.$$

Do tam giác ABC vuông tại B nên suy ra $AC^2 = AB^2 + BC^2 = (x + 0,5)^2 + \frac{16(x + 0,5)^2}{x^2}$.

$$\text{Ra rút ra } AC^2 = \frac{(x + 0,5)^2 (x^2 + 16)}{x^2}.$$

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{x^4 + x^3 + \frac{65}{4}x^2 + 16x + 4}{x^2} \quad (x > 0).$$

Bài toán trở thành tìm min $f(x)$ với $x > 0$.

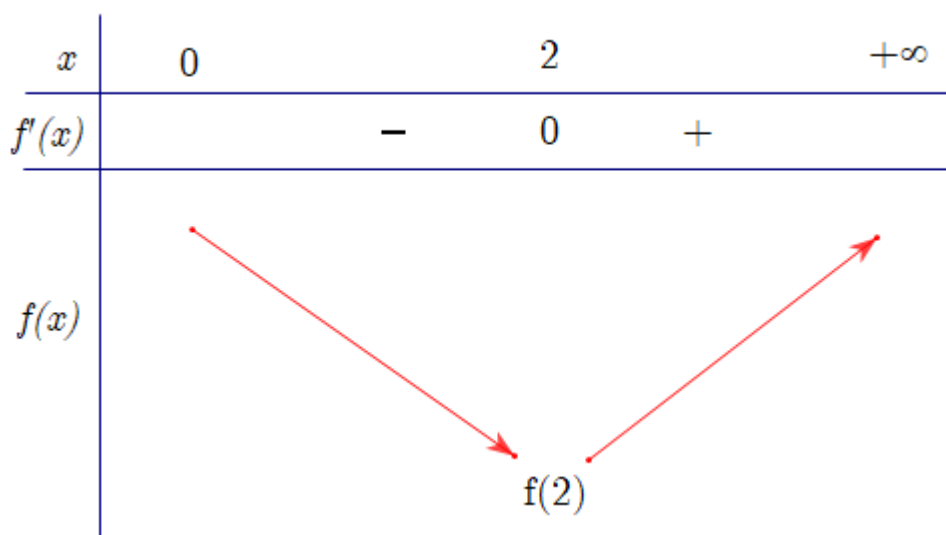
Ta có

$$f'(x) = \frac{\left(4x^3 + 3x^2 + \frac{65}{2}x + 16\right)x^2 - 2x\left(x^4 + x^3 + \frac{65}{4}x^2 + 16x + 4\right)}{x^4}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x^4 + x^3 - 16x - 8}{x^3}.$$

$$\text{Vậy } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(2x + 1)(x^2 + 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 > 0 \\ x = -\frac{1}{2} < 0. \end{cases}$$

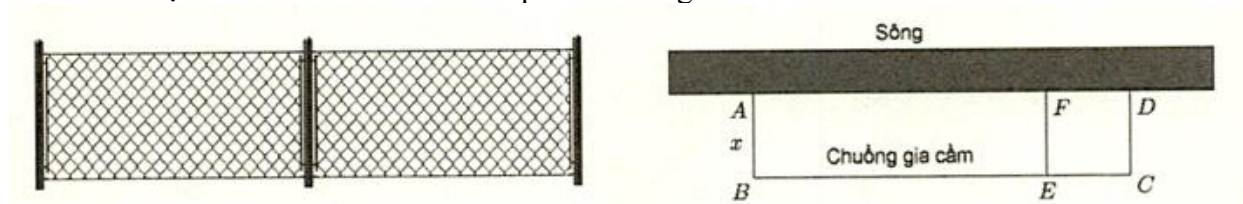
Lập bảng biến thiên, ta có



Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\min_{x>0} f(x) = f(2) = \frac{125}{4}$.

Do đó, ta có $\min AC = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{2} \approx 5,5902$.

Câu 18. Một chủ trang trại nuôi gia cầm muốn rào thành 2 chuồng hình chữ nhật sát nhau và sát một con sông, một chuồng nuôi gà và một chuồng nuôi vịt. Biết rằng đã có sẵn $240m$ hàng rào và cạnh bờ sông thì không phải rào. Hỏi diện tích lớn nhất có thể bao quanh chuồng là bao nhiêu?



Trả lời:.....

Lời giải

Xét hình chữ nhật $ABCD$ có các cạnh phải rào AB, BC, CD, EF như hình vẽ. Đặt $AB = x (x > 0)$.

Khi đó ta có $BC = 240 - 3x > 0 \Rightarrow x < 80$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S = x(240 - 3x) = 240x - 3x^2$.

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ với $0 < x < 80$

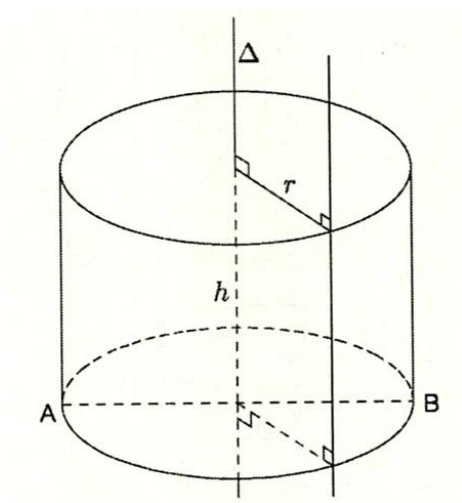
Xét $f(x) = 240x - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 240 - 6x, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 40$.

Ta có $f''(x) = -6 < 0, \forall x \in (0; 80)$.

Do đó $\max S = \max_{x \in (0; 80)} f(x) = f(40) = 4800 \Leftrightarrow x = 40$.

Vậy diện tích lớn nhất có thể bao quanh là $4800 m^2$.

Câu 19. Giả sử bạn là chủ của một xưởng cơ khí vừa nhận được một đơn đặt hàng là thiết kế một bồn chứa nước hình trụ có nắp với dung tích 20 lít. Để tốn ít nguyên vật liệu nhất thì chiều cao bồn nước lúc đó bằng bao nhiêu?



Trả lời:.....

Lời giải

Gọi $r, h (r, h > 0)$ lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của khối trụ. Khi đó ta có

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

Để tốn ít nguyên vật liệu nhất, ta cần tìm r sao cho diện tích toàn phần của khối trụ nhỏ nhất.

$$\text{Ta có } S_{tp} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi \left(r^2 + \frac{V}{\pi r} \right)$$

Xét hàm số $f(r) = r^2 + \frac{V}{\pi r}$. Bài toán trở thành tìm $\min_{r>0} f(r) = ?$

$$\text{Ta có } f'(r) = 2r - \frac{V}{\pi r^2}, f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$$

Lập bảng biến thiên, ta được

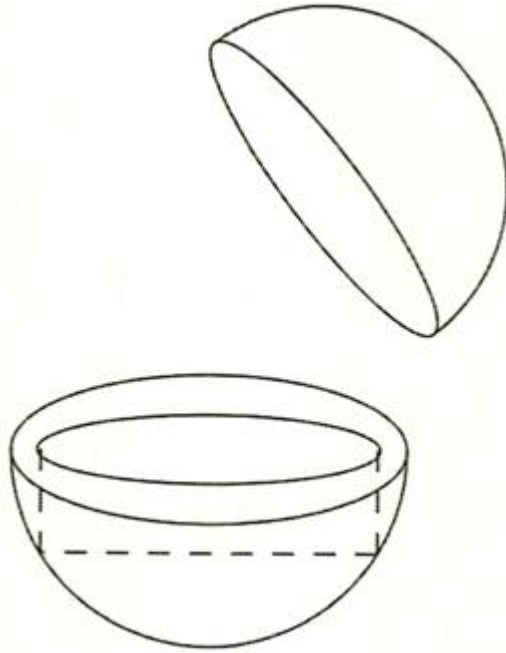
r	0	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$+\infty$	
$f'(r)$		-	0	+
$f(r)$				

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)$$

Từ bảng biến thiên, ta rút ra $\min_{r>0} f(r) = f\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)$

Khi đó $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 20}{\pi}} \approx 0,29m$.

Câu 20. Công ti mỹ phẩm chuẩn bị cho ra một mẫu sản phẩm dưỡng da mới mang tên Ngọc Trai với thiết kế là một khối cầu như viên ngọc trai khổng lồ, bên trong là một khối trụ nằm trong nửa khối cầu để đựng kem dưỡng da như hình vẽ.



Theo dữ kiện, nhà sản xuất dự định thiết kế khối cầu có bán kính là $R = 3\sqrt{3} \text{ cm}$. Tìm thể tích lớn nhất của khối trụ đựng kem sao cho thể tích thực ghi trên bìa hộp là lớn nhất.

Trả lời:.....

Lời giải

Ta có $V_{\text{trụ}} = \pi r^2 h$. Theo giả thiết, ta có $r^2 = R^2 - h^2$.

Suy ra $V_{\text{trụ}} = \pi r^2 h = \pi h(R^2 - h^2)$.

Xét hàm số $f(h) = h(R^2 - h^2), 0 < h < R$. Bài toán trở thành tìm $\max_{h \in (0, R)} f(h)$.

Đạo hàm $f'(h) = R^2 - 3h^2, f'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{R}{\sqrt{3}} < R$.

Lập bảng biến thiên, ta có

		R	
h	0	$\frac{R}{\sqrt{3}}$	R
$f'(h)$	$+$	0	$-$
$f(h)$		$f\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)$	

Từ bảng biến thiên, ta rút ra $\max_{h \in (0, R)} f(h) = f\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)$. Khi đó

$$\begin{aligned} V_{tru} &= \pi r^2 h = \pi h (R^2 - h^2) = \pi \frac{R}{\sqrt{3}} \left(R^2 - \frac{R^2}{3} \right) \\ &= \frac{2\pi R^3}{3\sqrt{3}} = 54\pi (cm^3) (R = 3\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Câu 21. Một con cá hồi bơi ngược dòng nước để vượt một khoảng cách là $300 km$. Vận tốc dòng nước là $6(km/h)$. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v(km/h)$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$ (trong đó c là hằng số dương, E được tính bằng đơn vị Jun). Cá bơi ngược dòng quãng đường $300 km$ trên trong khoảng thời gian t với vận tốc bằng bao nhiêu để năng lượng tiêu hao là thấp nhất?

Trả lời:.....

Lời giải

Vận tốc khi cá bơi ngược dòng sẽ là $v - 6(km/h)$.

Thời gian để bơi quãng đường $300 km$ là $t = \frac{300}{v-6}(h)$.

Năng lượng tiêu hao là $E(v) = 300c \frac{v^3}{v-6}(J)$.

Do $c > 0 \Rightarrow E(v)_{\min} \Leftrightarrow \frac{v^3}{v-6} = (f(v))_{\min}$.

Với $v > 9$, ta có $f'(v) = \frac{3v^2(v-6) - v^3}{(v-6)^2} = \frac{2v^3 - 18v}{(v-6)^2}, f'(v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ v = 9. \end{cases}$

Lập bảng biến thiên ta nhận $v = 9$ (do $v > 6$).

Vậy để năng lượng tiêu hao là thấp nhất thì vận tốc là $9(km/h)$.

Câu 22. Thể tích V của $1kg$ nước ở nhiệt độ t (t nằm giữa $0^\circ C$ đến $30^\circ C$) được cho bởi công thức $V = 999,87 - 0,06426t + 0,0085043t^2 - 0,0000679t^3 (m^3)$.

Ở nhiệt độ bao nhiêu độ C thì nước có khối lượng riêng lớn nhất?

Trả lời:.....

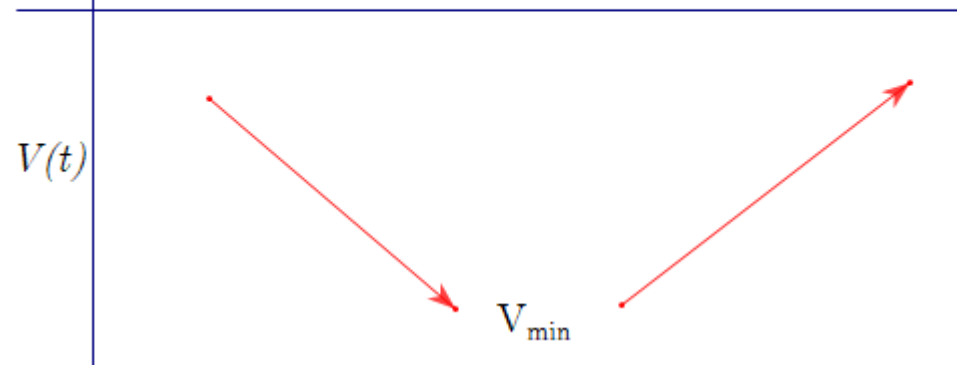
Lời giải

Ta có đạo hàm của thể tích

$$V'(t) = -0,06424 + 2.0,0085043t - 3 \cdot 0,0000679t^2$$

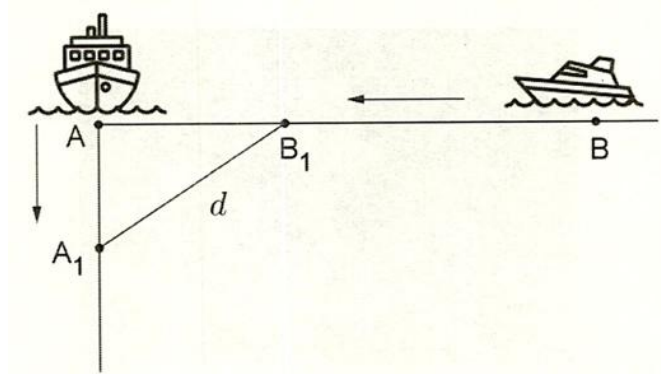
$$V'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 79,53138 \notin (0^\circ; 30^\circ) \\ t \approx 3,9665. \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên

t	0	3,9665	30
$V'(t)$	-	0	+
$V(t)$			

Từ bảng biến thiên, khối lượng riêng lớn nhất của vật khi thể tích nhỏ nhất lúc vật có nhiệt độ xấp xỉ gần bằng $4^\circ C$.

Câu 23. Hai con tàu A và B đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 5 hải lí. Cả hai tàu đồng thời cùng khởi hành. Tàu A chạy về hướng Nam với 6 hải lí/giờ, còn tàu B chạy về vị trí hiện tại của tàu A với vận tốc 7 hải lí/giờ. Hỏi sau bao lâu thì khoảng cách giữa hai tàu là bé nhất?



Trả lời:.....

Lời giải

Tại thời điểm t , sau khi xuất phát, khoảng cách giữa hai tàu là d . Khi đó tàu A đang ở vị trí A_1 và tàu B đang ở vị trí B_1 như hình vẽ trên.

$$\text{Ta có } d^2 = AB_1^2 + AA_1^2 = (5 - BB_1)^2 + AA_1^2 = (5 - 7t)^2 + (6t)^2.$$

Quãng đường tàu B đi được là $BB_1 = v_B \cdot t = 7t$.

Quãng đường tàu A đi được là $AA_1 = v_A \cdot t = 6t$.

Vậy $d = \sqrt{85t^2 - 70t + 25}$.

Đặt $f(t) = \sqrt{85t^2 - 70t + 25}$ (với $t > 0$).

Bài toán trở thành tìm $\min_{t \in (0;5)} f(t)$.

Ta có $f'(t) = \frac{170t - 70}{2\sqrt{85t^2 - 70t + 25}}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7}{17}$ (h).

Lập bảng biến thiên

t	0	$\frac{7}{17}$	$+\infty$	
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$				

$\frac{6\sqrt{85}}{17}$

Từ bảng biến thiên, ta có $\min_{x \in (0; \frac{\pi}{2})} f(t) = f\left(\frac{7}{17}\right) = \frac{6\sqrt{85}}{17} \approx 3,524$ (hải lí)

Câu 24. Một công ty đánh giá rằng sẽ bán được N lô hàng nếu chi hết số tiền là x (triệu đồng) vào việc quảng cáo. Biết rằng N và x liên hệ với nhau bằng biểu thức $N(x) = -x^2 + 30x + 6, 0 \leq x \leq 30$. Hãy tìm số lô hàng lớn nhất mà công ti có thể bán sau đợt quảng cáo?

Trả lời:.....

Lời giải

Ta có

$$N(x) = -x^2 + 30x + 6 \Rightarrow N'(x) = -2x + 30$$

$$\Rightarrow N'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 15.$$

Đồng thời, ta cũng có

$$\begin{cases} N(0) = 6 \\ N(15) = 231 \Rightarrow \max_{x \in [0;30]} N(x) = 231 \Leftrightarrow x = 15. \\ N(30) = 6 \end{cases}$$

Vậy nếu công ti dành 15 triệu cho việc quảng cáo thì công ti sẽ bán được nhiều nhất là 231 lô hàng.

Câu 25. Công ti truyền hình cáp Vista hiện có 100000 thuê bao. Mỗi thuê bao đang trả cước thuê bao 40\$/ tháng. Một cuộc khảo sát cho thấy cứ mỗi lần giảm 0,25\$ cước thuê bao, công ti có thể có thêm 1000 thuê bao. Để doanh thu thu được là tối đa, công ti cần xác định mức cước thuê bao mỗi tháng là bao nhiêu?

Trả lời:.....

Lời giải

Gọi x là số lần giảm 0,25\$. Cước thuê bao hàng tháng lúc này là $40 - 0,25x$ với $0 \leq x \leq 160$ (do mức cước không thể âm), và số thuê bao mới là $1000x$. Do đó, tổng số thuê bao là $100000 + 1000x$. Hàm doanh thu được cho bởi

$$R = (\text{số thuê bao}) \times (\text{cước mỗi thuê bao trả})$$

hay

$$\begin{aligned} R &= (100000 + 1000x)(40 - 0,25x) \\ &= 1000(100 + x)(40 - 0,25x) \\ &= 1000(4000 + 15x - 0,25x^2). \end{aligned}$$

Đạo hàm $R' = 0$, ta được

$$R' = 1000(15 - 0,5x) = 0 \Leftrightarrow x = 30.$$

Vì tập xác định của R là khoảng đóng $[0; 160]$, nên R đạt cực đại tại $x = 30$ hoặc tại các điểm đầu mút của đoạn $[0; 160]$.

Ta có

$$\begin{aligned} R(0) &= 1000(4000 + 15(0) - 0,25(0)^2) = 4000000 \\ R(30) &= 1000(4000 + 15(30) - 0,25(30)^2) = 4225000 \\ R(160) &= 1000(4000 + 15(160) - 0,25(160)^2) = 0 \end{aligned}$$

Vậy doanh thu tối đa khi $x = 30$. Điều này tương ứng với 30 lần giảm 0,25\$, tức là cước thuê bao hàng tháng là $40\$ - 7,5\$ = 32,5\$$. Số thuê bao tại mức cước này là $100000 + 30.(1000) = 130000$.

Câu 26. Một bài báo trong tạp chí xã hội học phát biểu rằng nếu một chương trình chăm sóc sức khỏe đặc biệt cho người già được khởi xướng, thì t năm sau khi nó được khởi động, n ngàn người già có thể trực tiếp nhận được các phúc lợi, trong đó

$$n = \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 32t \quad (0 \leq t \leq 12)$$

Với giá trị nào của t thì số người nhận phúc lợi tối đa là bao nhiêu?

Trả lời:.....

Lời giải

$$\text{Đạo hàm } n'(t) = 0, \text{ ta có } n'(t) = t^2 - 12t + 32 = 0 \Leftrightarrow (t - 4)(t - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = 8. \end{cases}$$

Vì tập xác định của n là một khoảng đóng $[0;12]$ nên n đạt cực đại tuyệt đối tại $t = 0, t = 4, t = 8$ hoặc $t = 12$:

$$n(0) = \frac{0^3}{3} - 6(0^2) + 32(0) = 0$$

$$n(4) = \frac{4^3}{3} - 6(4^2) + 32(4) = \frac{160}{3}$$

$$n(8) = \frac{8^3}{3} - 6(8^2) + 32(8) = \frac{128}{3}$$

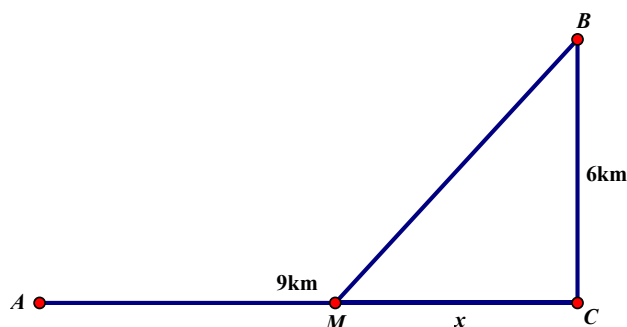
$$n(12) = \frac{12^3}{3} - 6(12^2) + 32(12) = \frac{288}{3} = 96$$

Do đó n đạt cực đại khi $t = 12$ (năm).

Câu 27. Một công ty muốn xây một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ biển đến một điểm B trên một hòn đảo. Giá để xây đường ống trên bờ là 50000 USD mỗi km và 130000 USD để xây mỗi km dưới nước. Gọi C là điểm trên bờ biển sao cho BC vuông góc với bờ biển, $BC = 6$ km, $AC = 9$ km. Gọi M là vị trí trên đoạn AC sao cho khi làm ống dẫn theo đường gấp khúc AMB thì chi phí ít nhất. Hỏi chi phí thấp nhất để hoàn thành việc xây dựng đường ống dẫn là bao nhiêu?

Trả lời:.....

Lời giải



- Đặt $CM = x$ (km), với $0 \leq x \leq 9$.

- Ta có: tổng chi phí để xây dựng đường ống dẫn theo đường gấp khúc AMB là:

$$T = 50000.(9 - x) + 130000.\sqrt{x^2 + 36} \text{ USD.}$$

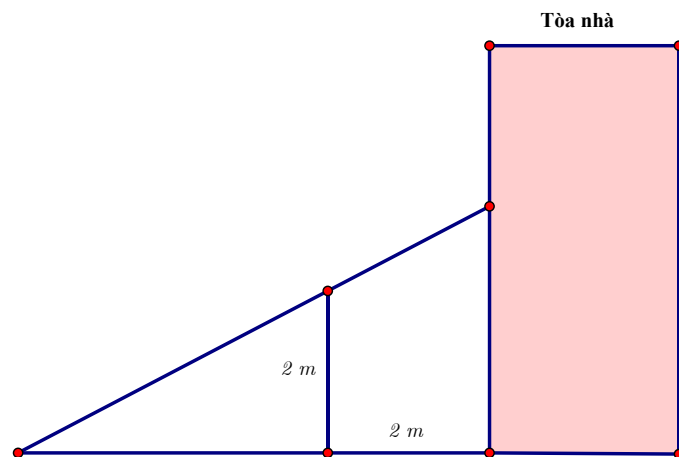
Xét hàm số $f(x) = 50000.(9 - x) + 130000.\sqrt{x^2 + 36}$ trên đoạn $[0;9]$, ta có :

$$f'(x) = -5000 + \frac{13000x}{\sqrt{x^2 + 36}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Lại có : } f(0) = 1230000, f\left(\frac{5}{2}\right) = 1170000, f(9) \approx 1406165.$$

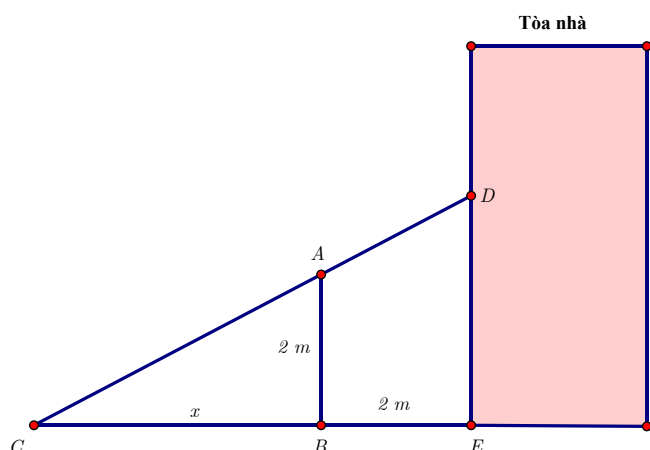
Vậy $T_{\min} = 1170000$ USD.

Câu 28. Một bức tường cao 2m nằm song song với tòa nhà và cách tòa nhà 2m. Người ta muốn chế tạo một chiếc thang bắc từ mặt đất bên ngoài bức tường, gác qua bức tường và chạm vào tòa nhà (xem hình vẽ). Hỏi chiều dài tối thiểu của thang bằng bao nhiêu mét ?



Trả lời:.....

Lời giải



Đặt $BC = x (x > 0)$. Ta cần tìm x để độ dài CD đạt GTNN.

$$\text{Ta có } \frac{BC}{CE} = \frac{x}{x+2} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow CD = AC \cdot \frac{x+2}{x} = \sqrt{x^2+4} \cdot \frac{x+2}{x}.$$

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}(x+2)}{x}.$$

$$\text{Cách 1: Ta có } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{8}{x^2\sqrt{x^2+4}}. f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

BBT

x	0	2	3
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$+\infty$	$4\sqrt{2}$	$+\infty$

Câu 29. Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s = -t^3 + 6t^2 + 17t$, với $t(s)$ là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $s(m)$ là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Trong khoảng thời gian 8 giây đầu tiên, vận tốc $v(m/s)$ của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng?

Trả lời:.....

Lời giải

Có: $v = s' = -3t^2 + 12t + 17$

Ta đi tìm giá trị lớn nhất của $v = -3t^2 + 12t + 17$ trên Khoảng $(0; 8)$

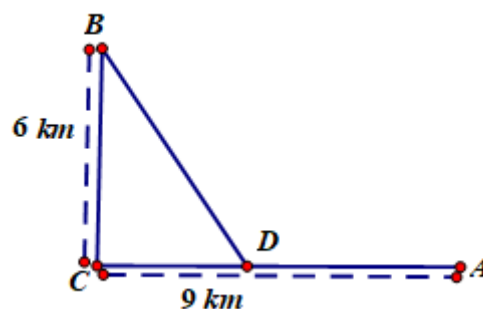
$v' = -6t + 12, v' = 0 \Rightarrow t = 2$

BBT:

t	0	2	8
v'		+	0
V			29

Vậy vận tốc lớn nhất trong khoảng 8 giây đầu tiên là: $29m/s$.

Câu 30. Một công ty muốn làm một đường ống dẫn dầu từ một kho A ở trên bờ biển đến một vị trí B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Gọi C là điểm trên bờ sao cho BC vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến C là 9 km. Người ta cần xác định một vị trí D trên AC để lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ADB. Tính khoảng cách AD để số tiền chi phí thấp nhất, biết rằng giá để lắp đặt mỗi km đường ống trên bờ là 100.000.000 đồng và dưới nước là 260.000.000 đồng.



Trả lời:.....

Lời giải

Đặt $AD = x$ km, $x > 0$. $CD = 9 - x$; $BD = \sqrt{36 + (9 - x)^2}$

Giá thành lắp đặt là: $100.10^6 x + \sqrt{36 + (9 - x)^2} . 260.10^6 = 10^7 [10x + 26\sqrt{36 + (9 - x)^2}]$

Xét hàm số $f(x) = 10x + \sqrt{36 + (9 - x)^2} . 26$ ($0 < x < 9$)

$f'(x) = 10 - 26 \cdot \frac{9 - x}{\sqrt{36 + (9 - x)^2}} = 0$

$\Leftrightarrow 10\sqrt{36 + (9 - x)^2} - 26(9 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 9 \\ -576x^2 + 10368x - 43056 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{13}{2}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0; 9)$ ta thấy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = \frac{13}{2}$.

Vậy $AD = 6.5$ km.

Câu 31. Người ta muốn xây một chiếc bể chứa nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3} m^3$. Biết đáy hồ là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là 100.000 đồng/ m^2 . Tìm kích thước của hồ để chi phí thuê nhân công ít nhất. Khi đó chi phí thuê nhân công là?

Trả lời:.....

Lời giải

Gọi $x (x > 0)$ là chiều rộng của đáy suy ra thể tích bể nước bằng

$$V = 2x^2 \cdot h = \frac{500}{3} \Leftrightarrow h = \frac{250}{3x^2}$$

Diện tích xung quanh hồ và đáy bể là $S = 6x \cdot h + 2x^2 = \frac{500}{x} + 2x^2 (x > 0)$

Xét hàm số $f(x) = \frac{500}{x} + 2x^2$ với $x > 0$.

$$f'(x) = -\frac{500}{x^2} + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0; +\infty)$ ta thấy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = 5$

Vậy chi phí thuê nhân công là: $150 \cdot 100.000 = 15 \cdot 10^6$.

Câu 32. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,035x^2(15 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.

Trả lời:.....

Lời giải

Đk: $x \in [0; 15]$. (vì độ giảm huyết áp không thể là số âm)

$$\text{Có } G'(x) = 0,035[2x(15 - x) - x^2] = 0,105x(10 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 10 \end{cases}$$

$$G(0) = 0; G(10) = \frac{35}{2}; G(15) = 0.$$

Bảng biến thiên:

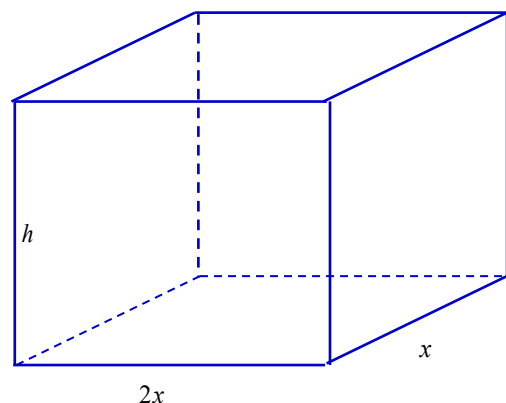
x	0	10	15
$G'(x)$		+	-
$G(x)$	0	$\frac{35}{2}$	0

Vậy huyết áp bệnh nhân giảm nhiều nhất khi tiêm cho bệnh nhân liều $x = 10$ miligam.

Câu 33. Người ta cần xây một bể chứa nước sản xuất dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 200 m^3 . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chi phí để xây bể là 300 nghìn đồng/ m^2 (chi phí được tính theo diện tích xây dựng, bao gồm diện tích đáy và diện tích xung quanh, không tính chiều dày của đáy và diện tích xung quanh, không tính chiều dày của đáy và thành bể). Hãy xác định chi phí thấp nhất để xây bể (làm tròn đến đơn vị triệu đồng).

Trả lời:.....

Lời giải



Gọi x là chiều rộng của đáy, h là chiều cao của đáy.

Thể tích của khối hộp chữ nhật không nắp bằng 200 m^3 nên ta có

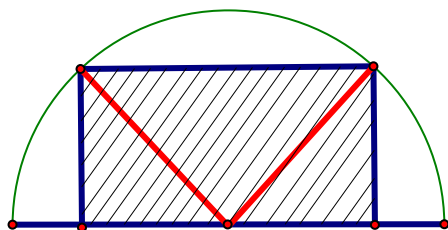
$$V = 2x \cdot x \cdot h = 200 \text{ cm}^3 \Rightarrow h = \frac{100}{x^2}.$$

$$\text{Diện tích bề nước là } S = 2x^2 + 6xh = 2x^2 + \frac{600}{x} = f(x).$$

$$f'(x) = 4x - \frac{600}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{150}. \text{ Suy ra } \text{Min } f(x) = f(\sqrt[3]{150}).$$

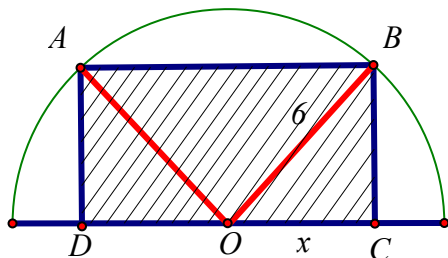
Chi phí thấp nhất để xây bể là $f(\sqrt[3]{150}) \cdot 300.000 \approx 51$ triệu đồng.

Câu 34. Tính diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của một hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính $R = 6 \text{ cm}$ nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp.



Trả lời:.....

Lời giải



Gọi hình chữ nhật cần tính diện tích là $ABCD$ có $OC = x$ ($0 < x < 6$), $OB = 6$.

Khi đó diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ là: $S = AB \cdot BC = 2x\sqrt{36 - x^2} = f(x)$.

Diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ là giá trị lớn nhất của $f(x) = 2x\sqrt{36 - x^2}$ trên $(0; 6)$.

$$f'(x) = 2\sqrt{36 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{36 - x^2}} = \frac{-4x^2 + 72}{\sqrt{36 - x^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\sqrt{2} \in (0; 6) \\ x = -3\sqrt{2} \notin (0; 6) \end{cases}.$$

BBT

x	0	$3\sqrt{2}$	6	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	36	0	

Ta có: $\max_{(0;6)} f(x) = 36$.

Vậy $S_{\max} = 36 \text{ cm}^2$.

Câu 35. Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a , đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn đường kính r . Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{a}{r}$ bằng?

Trả lời:.....

Lời giải

Độ dài đoạn dây bằng 60cm, cạnh hình vuông bằng a , bán kính đường tròn bằng r nên ta có:

$$4a + 2\pi r = 60 \Leftrightarrow r = \frac{30 - 2a}{\pi} (1).$$

Gọi S là tổng diện tích của hình vuông và hình tròn, suy ra $S = a^2 + \pi r^2 (2)$.

$$\text{Thay (1) vào (2) ta được } S = a^2 + \frac{(30 - 2a)^2}{\pi}.$$

$$\text{Khi đó } S' = 2a - \frac{4(30 - 2a)}{\pi} = \frac{(2\pi + 8)a - 120}{\pi}.$$

$$\text{Cho } S' = 0 \Leftrightarrow a = \frac{60}{\pi + 4}.$$

Bảng biến thiên.

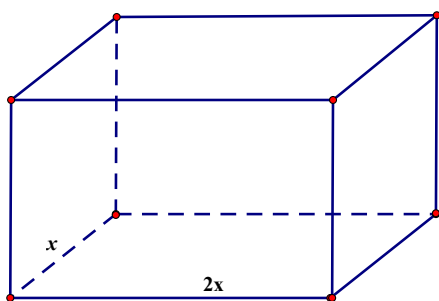
x	0	$\frac{60}{\pi + 4}$	60
S'	-	0	+
S			

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy S nhỏ nhất khi $a = \frac{60}{\pi + 4} \Rightarrow r = \frac{30}{\pi + 4}$. Vậy $\frac{a}{r} = 2$.

Câu 36. Ông A sử dụng hết 5 m^2 kính để làm bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Trả lời:.....

Lời giải



Gọi độ dài các cạnh đáy của bể cá lần lượt là $x, 2x$, chiều cao của bể là h ($x, h > 0$).

Diện tích kính làm bể là

$$S = x.2x + 2xh + 2.2x.h = 2x.(x + 3h) = 5 \Rightarrow h = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{2x} - x \right).$$

Dung tích của chiếc bể là

$$V = x.2x.h = \frac{2}{3}x^2 \cdot \left(\frac{5}{2x} - x \right) = \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}x^3 = f(x).$$

$$f'(x) = \frac{5}{3} - 2x^2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{5}{6}}.$$

Lập bảng biến thiên của $f(x)$ ta tìm được $\max V = f\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right) \approx 1,01 \text{ (m}^3\text{)}.$

Câu 37. Đợt nộp hồ sơ dự thi tốt nghiệp THPT quốc gia thường kéo dài 1 tháng (30 ngày). Nhà trường nhận thấy số lượng hồ sơ mà học sinh nộp tính theo ngày thứ t được cho công thức $S(t) = \frac{1}{50}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 36t - 270$ (hồ sơ) với $1 \leq t \leq 30$. Hỏi trong 30 ngày đó thì ngày thứ mấy có số lượng hồ sơ nộp nhiều nhất?

Trả lời:.....

Lời giải

$$S'(t) = \frac{3}{50}t^2 - 3t + 36; S'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 20 \\ t = 30 \end{cases}.$$

t	1	20	30	
$S'(t)$	+	0	-	0
$S(t)$	$\nearrow$ $S_{\max}$ $\searrow$			

Vậy ngày thứ 20 có số lượng hồ sơ nộp nhiều nhất.

Câu 38. Một viên đá được ném lên từ gốc tọa độ O trong mặt phẳng Oxy (Ox nằm ngang) chuyển động theo đường (quỹ đạo) có phương trình $y = -(1 + m^2)x^2 + mx$. Tìm giá trị của tham số thực, dương m để viên đá rơi xuống tại điểm cách O xa nhất.

Trả lời:.....

Lời giải

$$-(1+m^2)x^2 + mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{m}{1+m^2} \end{cases}.$$

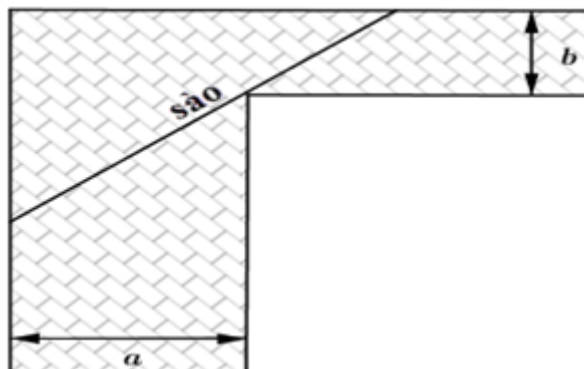
Viên đá rơi xuống tại điểm cách O xa nhất $\Leftrightarrow f(m) = \frac{m}{1+m^2}$ (với $m > 0$) lớn nhất.

Ta có $f'(m) = \frac{1 \cdot (1+m^2) - m \cdot 2m}{(1+m^2)^2} = \frac{-m^2+1}{(1+m^2)^2} \Rightarrow$ Ta có bảng biến thiên

m	0	1	$+\infty$
$f'(m)$	+	0	-
$f(m)$			

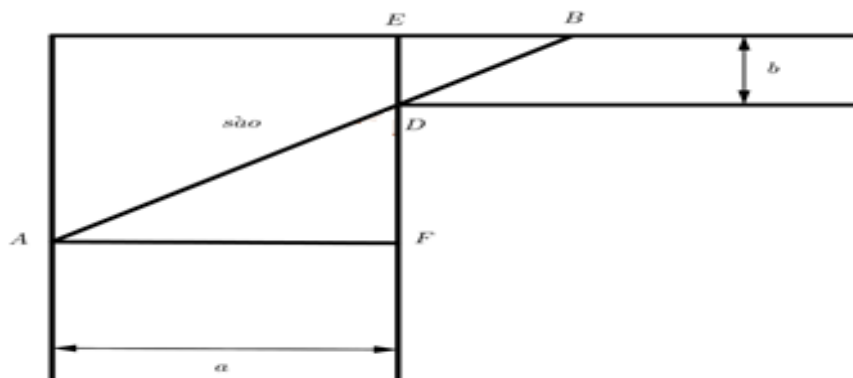
$\Rightarrow f(m)$ lớn nhất khi $m = 1$.

Câu 39. Để chặn đường hành lang hình chữ L, người ta dùng một que sào thẳng dài đặt kín những điểm chạm với hành lang (như hình vẽ). Biết $a = 24$ và $b = 3$, hỏi cái sào thỏa mãn điều kiện trên có chiều dài tối thiểu là bao nhiêu?



Trả lời:.....

Lời giải



Đặt các điểm như hình vẽ.

Đặt $DF = x$, $x > 0$, ta có $\triangle ADF$ đồng dạng với $\triangle BED$ nên $\frac{EB}{ED} = \frac{AF}{DF} \Rightarrow EB = \frac{ab}{x}$.

Gọi l là chiều dài của que sào, ta có $l^2 = AB^2 = (x+b)^2 + \left(a + \frac{ab}{x}\right)^2 = f(x)$.

a) Ta có: $v(t) = s'(t) = (t^3 - 9t^2 + 15t)' = 3t^2 - 18t + 15$

b) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $v(t) > 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 18t + 15 > 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-5) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < 1 \\ t > 5 \end{cases}$

$v(t) < 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 18t + 15 < 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-5) < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 5$

Chất điểm chuyển động theo chiều dương (sang bên phải) khi $v(t) > 0$, tức là $t \in (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$.

Chất điểm chuyển động theo chiều âm (sang bên trái) khi $v(t) < 0$, tức là $1 < t < 5$.

Câu 2. Giả sử số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 2000 được mô tả bởi hàm số

$N(t) = \frac{25t+10}{t+5}, t \geq 0$, trong đó $N(t)$ được tính bằng nghìn người.

a) Tính số dân của thị trấn đó vào các năm 2000 và 2015.

b) Tính đạo hàm $N'(t)$ và $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$. Từ đó, giải thích tại sao số dân của thị trấn đó luôn tăng nhưng sẽ không vượt quá một ngưỡng nào đó.

Lời giải

a) Dân số của thị trấn đó vào năm 2000 là: $N(0) = \frac{25 \cdot 0 + 10}{0 + 5} = \frac{10}{5} = 2$ (nghìn người)

Dân số của thị trấn đó vào năm 2015 là: $N(15) = \frac{25 \cdot 15 + 10}{15 + 5} = 19,25$ (nghìn người)

b) Ta có $N'(t) = \frac{115}{(t+5)^2} > 0, \forall t > 0$ và $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25t+10}{t+5} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25 + \frac{10}{t}}{1 + \frac{5}{t}} = 25$

Vì trên khoảng $(0; +\infty)$ có $N'(t) > 0$ và $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 25$ nên dân số của thị trấn đó luôn tăng nhưng sẽ không vượt qua ngưỡng 25 nghìn người.

Câu 3. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1990 được ước tính bởi công thức

$f(t) = \frac{27t+10}{t+10}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người).

a) Số dân của thị trấn vào đầu năm 2005 là 19,57 nghìn người.

b) Xem f là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Khi đó $f'(t) = \frac{260}{(t+10)^2}$

c) Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm).

Khi đó tốc độ tăng dân số được dự kiến vào năm 2008 của thị trấn là $\approx 0,33$

d) Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm).

Khi đó vào năm 2026 thì tốc độ tăng dân số là 0,125 nghìn người/năm

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
----------------	----------------	----------------	----------------

a) Vào đầu năm 2000, ta có $t = 10$; $f(10) = 14$.

Vậy số dân của thị trấn vào đầu năm 2000 là 14 nghìn người.

- Vào đầu năm 2005, ta có $t = 25$; $f(25) \approx 19,57$.

Số dân của thị trấn vào đầu năm 2005 là 19,57 nghìn người.

b) $f'(t) = \frac{260}{(t+10)^2}$ với mọi $t > 0$; $f(t)$ liên tục trên $[0; +\infty)$

(vì liên tục trên khoảng $(-10; +\infty)$)

Vậy hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$.

c) Tốc độ tăng dân số vào đầu năm 2002 là $f'(12) = \frac{260}{22^2} = 0,54$ (do $t = 2002 - 1990 = 12$).

- Tốc độ tăng dân số được dự kiến vào năm 2008 của thị trấn là:

$$f'(18) = \frac{260}{28^2} \approx 0,33 \text{ (do } t = 2008 - 1990 = 18).$$

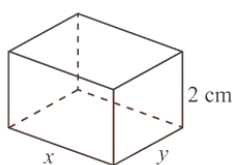
d) Ta có

$$f'(t) = 0,125 \Leftrightarrow \frac{260}{(t+10)^2} = 0,125 \Leftrightarrow t+10 = \sqrt{\frac{260}{0,125}} \approx 46$$

$$\Rightarrow t \approx 36.$$

Vậy vào năm 2026, tốc độ tăng dân số của thị trấn là 0,125.

Câu 4. Người ta muốn chế tạo một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có thể tích 500 cm^3 với yêu cầu dùng ít vật liệu nhất.



Chiều cao hộp phải là 2 cm , các kích thước khác là x, y với $x > 0$ và $y > 0$.

a) Hãy biểu thị y theo x .

b) Chứng tỏ rằng diện tích toàn phần của chiếc hộp là: $S(x) = 500 + 4x + \frac{1000}{x}$.

c) Lập bảng biến thiên của hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

d) Kích thước của hộp là bao nhiêu thì dùng ít vật liệu nhất? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

a) $y = \frac{500}{2x} = \frac{250}{x}$

b) Diện tích toàn phần của chiếc hộp là:

$$S(x) = 2 \cdot 2(x + y) + 2xy = 4 \left(x + \frac{250}{x} \right) + 2 \cdot x \cdot \frac{250}{x} = 500 + 4x + \frac{1000}{x}$$

c) Tập xác định: $D = (0; +\infty)$

- Chiều biến thiên:

$$S'(x) = 4 - \frac{1000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5\sqrt{10} \\ x = -5\sqrt{10} (\text{loại}) \end{cases}$$

- Giới hạn và tiệm cận:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(500 + 4x + \frac{1000}{x} \right) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} S(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(500 + 4x + \frac{1000}{x} \right) = -\infty$$

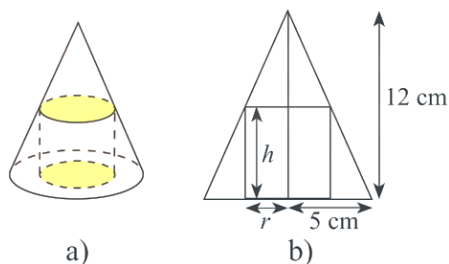
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(500 + 4x + \frac{1000}{x} \right) = +\infty; \lim_{x \rightarrow 0^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(500 + 4x + \frac{1000}{x} \right) = -\infty$$

Bảng biến thiên:

x	0	$5\sqrt{10}$		$+\infty$
$S'(x)$		-	0	+
$S(x)$	$+\infty$	$500+40\sqrt{10}$		

d) Để $S(x)$ nhỏ nhất thì $x = 15,8(\text{cm})$ và $y = \frac{250}{x} = \frac{250}{5\sqrt{10}} \approx 15,8(\text{cm})$

Câu 5. Cho một hình trụ nội tiếp trong hình nón có chiều cao bằng 12cm và bán kính đáy bằng 5cm (Hình a). Người ta cắt hình nón, trụ này theo mặt phẳng chứa đường thẳng nối đỉnh và tâm hình tròn đáy của hình nón thì thu được một hình phẳng như Hình **b**.



a) Chứng minh rằng công thức tính bán kính r của đáy hình trụ theo chiều cao h của nó là:

$$r = \frac{5(12 - h)}{12}.$$

b) Chứng minh biểu thức sau biểu thị thể tích khối trụ theo h :

$$V(h) = \frac{25\pi h(12-h)^2}{144}.$$

c) Tìm h để khối trụ có thể tích lớn nhất.

Lời giải

a) Ta có: $rh = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot h(5-r) - \frac{1}{2}(12-h) \cdot r = \frac{60-5h+rh-12r+rh}{2}$

$$\Leftrightarrow 2rh = 60 - 5h + 2rh - 12r \Leftrightarrow 12r = 60 - 5h \Leftrightarrow r = \frac{5(12-h)}{12}$$

b) Thể tích khối trụ là: $V(h) = \pi r^2 h = \pi \cdot \frac{5^2(12-h)^2}{12^2} h = \frac{25\pi h(12-h)^2}{144}$

c) $V'(h) = \frac{75\pi h^2 - 1200\pi h + 3600\pi}{144} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h = 4 \\ h = 12 \end{cases}$

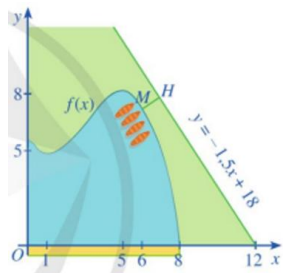
Bảng biến thiên:

h	0	4	10	$+\infty$
$V'(h)$		+	-	+
$V(h)$	0	$\frac{400\pi}{9}$	$\frac{125\pi}{18}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\max_{(0;+\infty)} V(h) = V(4) = \frac{400\pi}{9}$

Vậy để khối trụ có thể tích lớn nhất thì $h = 4\text{ cm}$

Câu 6. Một hồ nước nhân tạo được xây dựng trong một công viên giải trí. Trong mô hình minh họa (Hình), nó được giới hạn bởi các trục tọa độ và đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56)$. Đơn vị đo độ dài trên mỗi trục tọa độ là 100m



a) Đường dạo ven hồ chạy dọc theo trục Ox dài bao nhiêu mét?

b) Tại những điểm nào trên đường đi dạo ven hồ (chạy dọc theo trục Ox) thì khoảng cách theo Hình phương thẳng đứng đến bờ hồ đối diện là lớn nhất? Tìm khoảng cách lớn nhất đó.

c) Trong công viên có một con đường chạy dọc theo đồ thị hàm số $y = -1,5x + 18$. Người ta dự định xây dựng bên bờ hồ một bến thuyền đập nước sao cho khoảng cách từ bến thuyền đến con đường này là ngắn nhất. Tìm tọa độ của điểm để xây bến thuyền này.

Giải

a) Trong Hình, đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56)$ cắt tia Ox tại điểm có hoành độ $x = 8$. Vậy đường dạo ven hồ chạy dọc theo trục Ox dài $800m$.

b) Ta khảo sát hàm số: $f(x) = \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56)$ với $0 \leq x \leq 8$.

$$f'(x) = \frac{1}{10}(-3x^2 + 18x - 15);$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5.$$

Bảng biến thiên:

x	0	1	5	8			
$f'(x)$	-	0	+	0	-		
$f(x)$	5,6		4,9		8,1		0

Căn cứ bảng biến thiên, ta có: $\max_{[0;8]} f(x) = f(5) = 8,1$ tại $x = 5$.

Vậy khoảng cách lớn nhất theo phương thẳng đứng từ một điểm trên đường đi dạo ven hồ (chạy dọc theo trục Ox) đến bờ hồ đối diện là:

$100 \cdot (\max_{[0;8]} f(x)) = 100 \cdot f(5) = 100 \cdot 8,1 = 810(m)$ và đạt được tại điểm trên đường đi dạo ven hồ cách gốc O một khoảng cách là $500m$.

c) Xét điểm $M(x; f(x))$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56)$ với $0 \leq x \leq 8$.

Khoảng cách từ điểm $M(x; f(x))$ đến đường thẳng $y = -1,5x + 18 \Leftrightarrow -1,5x - y + 18 = 0$ là:

$$MH = \frac{\left| -1,5x - \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56) + 18 \right|}{\sqrt{(-1,5)^2 + 1}} = \frac{|x^3 - 9x^2 + 124|}{10\sqrt{3,25}}.$$

Ta khảo sát hàm số: $h(x) = x^3 - 9x^2 + 124$ với $0 \leq x \leq 8$.

$$h'(x) = 3x^2 - 18x;$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6.$$

Bảng biến thiên:

x	0	6	8
$h'(x)$	0	–	0
$h(x)$	124	16	60

Căn cứ bảng biến thiên, ta có: $h(x) > 0$ với $0 \leq x \leq 8$;

$$\min_{[0;8]} h(x) = h(6) = 16, x = 6.$$

$$\text{Do đó, } \min MH = \min_{[0;8]} \frac{|x^3 - 9x^2 + 124|}{10\sqrt{3,25}} = \frac{1}{10\sqrt{3,25}} \cdot \min_{[0;8]} h(x) = \frac{16}{10\sqrt{3,25}} \approx 0,8875$$

và đạt được tại $x = 6$. Khi đó, $f(6) = 7,4$.

Vậy trong mặt phẳng tọa độ Oxy ở Hình, điểm để xây bến thuyền có tọa độ là $M(6; 7,4)$.

Câu 7. Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng.

Trong khoảng 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm

$h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và h là độ cao tính bằng kilômét

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = h(t)$ với $0 \leq t \leq 50$ (đơn vị trên trục hoành là 10 giây, đơn vị trên trục tung là 10 km).

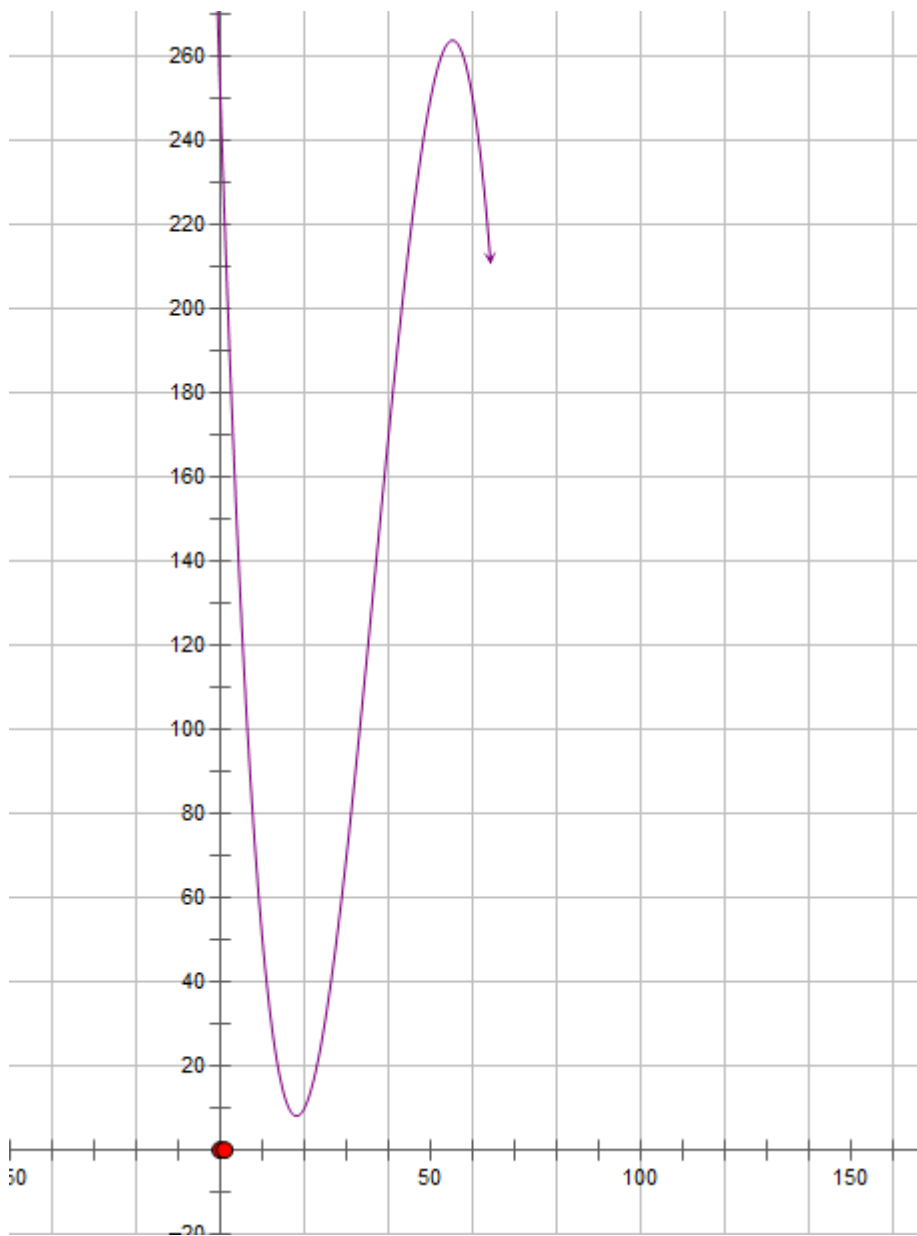
b) Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t (giây) kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với $0 \leq t \leq 50$. Xác định hàm số $v(t)$.

c) Vận tốc tức thời của con tàu lúc bắt đầu hãm phanh là bao nhiêu? Tại thời điểm $t = 25$ (giây) là bao nhiêu?

d) Tại thời điểm $t = 25$ (giây), vận tốc tức thời của con tàu vẫn giảm hay đang tăng trở lại?

Lời giải

a)



b) Vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t , $v(t)$, là đạo hàm của hàm số $h(t)$ theo thời gian t . Hàm số $h(t)$ đã cho là: $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$

Để tìm $v(t)$, ta lấy đạo hàm của $h(t)$: $v(t) = h'(t) = -0,03t^2 + 2,2t - 30$

Vậy hàm số $v(t)$ biểu diễn vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t là:

$$v(t) = -0,03t^2 + 2,2t - 30$$

c) Vận tốc tức thời của con tàu được xác định bởi hàm $v(t) = -0,03t^2 + 2,2t - 30$

Tại thời điểm bắt đầu hãm phanh ($t = 0$), vận tốc của con tàu là:

$$v(0) = -0,03 \cdot 0^2 + 2,2 \cdot 0 - 30 = -30 \text{ km/s}$$

Tại thời điểm $t = 25$ giây, vận tốc của con tàu là:

$$v(25) = -0,03 \cdot 25^2 + 2,2 \cdot 25 - 30 = -18,75 \text{ km/s}$$

Vậy, vận tốc tức thời của con tàu lúc bắt đầu hãm phanh là -30 km/s và tại thời điểm $t = 25$ giây là $-18,75 \text{ km/s}$. Lưu ý rằng vận tốc âm ở đây chỉ ra rằng con tàu đang di chuyển về phía Mặt Trăng.

d) Để xác định liệu vận tốc của con tàu tại thời điểm $t = 25$ giây có đang tăng hay giảm, chúng ta cần xem xét đạo hàm bậc hai của hàm số $h(t)$, tức là gia tốc của con tàu.

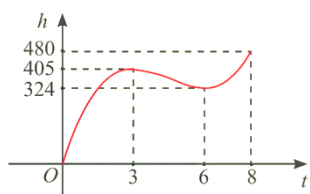
Gia tốc $a(t)$ là đạo hàm của vận tốc $v(t)$, tức là đạo hàm bậc hai của $h(t)$:

$$a(t) = v'(t) = -0,06t + 2,2$$

Tại thời điểm $t = 25$ giây, gia tốc của con tàu là: $a(25) = -0,06 \cdot 25 + 2,2 = -1,3 \text{ km/s}^2$

Vì gia tốc $a(25) < 0$, nên vận tốc của con tàu tại thời điểm $t = 25$ giây đang giảm.

Câu 8. Trong 8 phút đầu kể từ khi xuất phát, độ cao h (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm t phút được cho bởi công thức $h(t) = 6t^3 - 81t^2 + 324t$. Đồ thị của hàm số $h(t)$ được biểu diễn trong hình bên. Trong các khoảng thời gian nào khinh khí cầu tăng dần độ cao, giảm dần độ cao?



Độ cao của khinh khí cầu vào các thời điểm 3 phút và 6 phút sau khi xuất phát có gì đặc biệt?

Lời giải

Hàm số $h(t) = 6t^3 - 81t^2 + 324t$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$\text{Có } h'(t) = 18t^2 - 162t + 324; h'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 6 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	3	6	8		
y'		+	0	-	0	+
y	0	405	324	480		

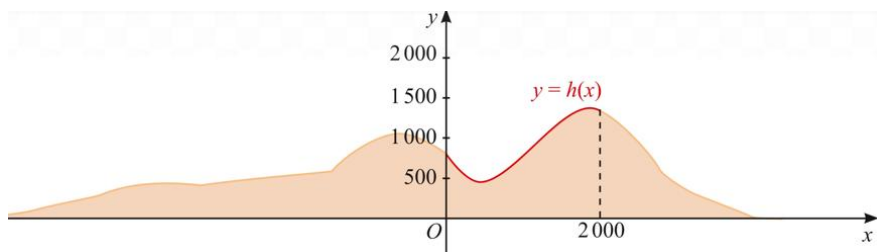
Trong thời gian từ lúc xuất phát đến thời điểm 3 phút, độ cao của khinh khí cầu tăng dần từ 0 m lên 405 m

Độ cao của khinh khí cầu tăng dần từ 0 m lên 405 m trong thời gian từ lúc xuất phát đến thời điểm 3 phút, từ 324 m lên 480 m trong thời gian từ 6 phút đến 8 phút

Độ cao của khinh khí cầu giảm dần từ 405 m xuống 324 m trong thời gian từ 3 phút đến 6 phút

Câu 9. Một phần lát cắt của dãy núi có độ cao tính bằng mét được mô tả bởi hàm số

$$y = h(x) = -\frac{1}{1320000}x^3 + \frac{9}{3520}x^2 - \frac{81}{44}x + 840, 0 \leq x \leq 2000.$$



Tìm tọa độ các đỉnh của lát cắt dãy núi trên đoạn $[0; 2000]$.

Lời giải

Tập xác định: $D = [0; 2000]$

$$h'(x) = -\frac{1}{440000}x^2 + \frac{9}{1760}x - \frac{81}{44} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1800 \\ x = 450 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	0	450		1800		2000
$h'(x)$		-	0	+	0	-
$h(x)$						

Vậy trên đoạn $[0; 2000]$:

Tọa độ đỉnh cực tiểu của dãy núi là $(450; 460,3125)$

Tọa độ đỉnh cực đại của dãy núi là $(1800; 1392,27)$

Câu 10. Kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam trong các năm từ 2010 đến 2017 có thể được tính xấp xỉ bằng công thức $f(x) = 0,01x^3 - 0,04x^2 + 0,25x + 0,44$ (tỉ USD) với x là số năm tính từ 2010 đến 2017 ($0 \leq x \leq 7$).

a) Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$.

b) Chứng minh rằng kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.

Lời giải

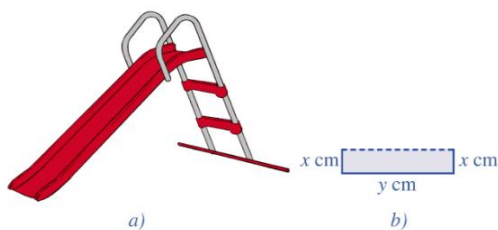
a) $y' = f'(x) = 0,03x^2 - 0,08x + 0,25$

b) Tập xác định: $D = [0; 7]$

Ta có: $y' = f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $y = f(x)$ luôn đồng biến $\forall x \in [0; 7]$

Vậy kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.

Câu 11. Máng trượt của một cầu trượt cho trẻ em (Hình a) được uốn từ một tấm kim loại có bề rộng 80 cm , mặt cắt được mô tả ở Hình b. Nhà thiết kế khuyến cáo, diện tích của mặt cắt càng lớn thì càng đảm bảo an toàn cho trẻ em.



a) Gọi S là diện tích mặt cắt. Tìm điều kiện của x và viết công thức tính S theo x .

b) Với x đạt giá trị bằng bao nhiêu thì cầu trượt đảm bảo an toàn nhất cho trẻ em?

Giải

a) Do tấm kim loại có bề rộng 80 cm nên ta có: $2x + y = 80 \Leftrightarrow y = 80 - 2x$.

Để có thể thiết kế được máng trượt thì $y > 0 \Leftrightarrow 80 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 40$. Suy ra $0 < x < 40$.

Diện tích của mặt cắt máng trượt là: $S = xy = x(80 - 2x) = -2x^2 + 80x$.

b) Ta có: $S(x) = -2x^2 + 80x$ với $x \in (0; 40)$;

$$S'(x) = -4x + 80;$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 80 = 0 \Leftrightarrow x = 20.$$

Bảng biến thiên của hàm số $S(x)$ như sau:

x	0	20	40
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$	0	800	0

Do đó, hàm số $S(x)$ đạt cực đại tại $x = 20$ và $S_{CD} = 800$.

Vậy để cầu trượt đảm bảo an toàn nhất cho trẻ em thì $x = 20(\text{cm})$.

Câu 12. Thể tích V (đơn vị: centimet khối) của 1 kg nước tại nhiệt độ T ($0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C}$) được tính bởi công thức sau: $V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3$.

Hỏi thể tích $V(T)$, $0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C}$, giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

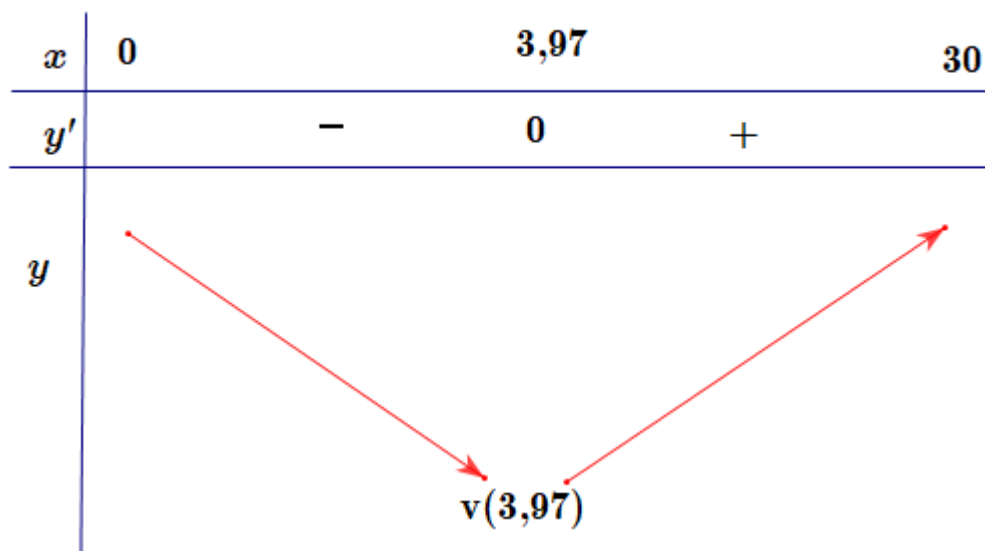
Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $V'(T) = -0,06426 + 2 \times 0,0085043 \times T - 3 \times 0,0000679T^2$.

$$\text{Nhận xét } V'(T) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} T \approx 79,5 \\ T \approx 3,97 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên sau:



Vật thể tích giảm trong khoảng nhiệt độ từ $(0^\circ; 3,97^\circ)$.

Câu 13. Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0(s)$ cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t = 126(s)$, cho bởi hàm số sau:

$$v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23, \quad (v \text{ được tính bằng } ft/s, 1 \text{ foot} = 0,3048m)$$



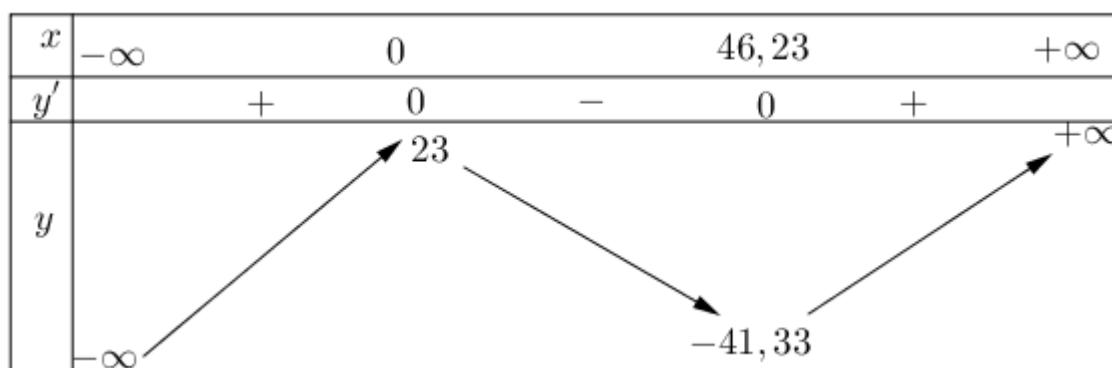
Hỏi gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian nào tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi?

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $v'(t) = 3 \times 0,001320t^2 - 2 \times 0,09029t$.

$$\text{Nhận xét } a(t) = v'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t \approx 46,23 \end{cases}$$



Vậy gia tốc tàu con thoi tăng trong khoảng $46,23$ s đầu tiên.

Câu 14. Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hoá bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2, 0 \leq t \leq 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần).

a) Hãy ước tính số người tối đa bị nhiễm bệnh ở địa phương đó.

b) Đạo hàm $N'(t)$ biểu thị tốc độ lây lan của virus (còn gọi là tốc độ truyền bệnh). Hỏi virus sẽ lây lan nhanh nhất khi nào?

Lời giải

a) Với $0 \leq t \leq 12$ ta có:

$$N'(t) = -3t^2 + 24t, N'(t) = 0 \Leftrightarrow -3t^2 + 24t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0(tm) \\ t = 8(tm) \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } N(0) = 0, N(8) = -8^3 + 12 \cdot 8^2 = 256, N(12) = -12^3 + 12 \cdot 12^2 = 0$$

Do đó, số người tối đa bị nhiễm bệnh ở địa phương là 256 người trong 12 tuần đầu.

b) Hàm số biểu thị tốc độ lây lan của virus là: $N'(t) = -3t^2 + 24t$

$$\text{Đặt } f(t) = -3t^2 + 24t, \text{ với } 0 \leq t \leq 12$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = -6t + 24, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4(tm)$$

$$f(0) = 0, f(4) = -3 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 = 48, f(12) = -3 \cdot 12^2 + 24 \cdot 12 = -144$$

Do đó, virus sẽ lây lan nhanh nhất khi $t = 4$ (tuần thứ 4).

Câu 15. Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích 1000 cm^3 . Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá $1,2$ nghìn đồng/ cm^2 , trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá $0,75$ nghìn đồng/ cm^2 . Tìm các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi bán kính đáy của bình là $x (\text{cm}, x > 0)$

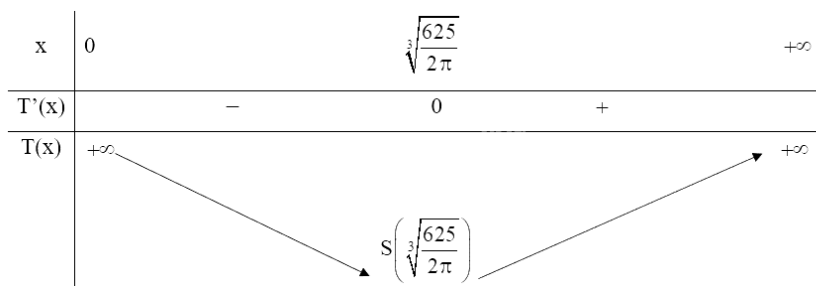
$$\text{Chiều cao của bình là: } \frac{1000}{\pi \cdot x^2} (\text{cm})$$

$$\text{Chi phí để sản xuất một chiếc bình là: } T(x) = 2 \cdot 1,2 \cdot \pi \cdot x^2 + 0,75 \cdot \frac{2000}{x} = 2,4\pi \cdot x^2 + \frac{1500}{x} \text{ (nghìn đồng)}$$

Để chi phí sản xuất mỗi chiếc bình là thấp nhất thì $T(x)$ là nhỏ nhất.

$$T'(x) = 4,8\pi x - \frac{1500}{x^2}, T'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}} \text{ (thỏa mãn)}$$

Bảng biến thiên:



Để chi phí sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất thì bán kính đáy của bình là $\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}} cm$ và chiều

cao của bình là: $\frac{1000}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}\right)^2} (cm)$

Câu 16. Khi làm nhà kho, bác An muốn cửa sổ có dạng hình chữ nhật với chu vi bằng $4m$ (Hình). Tìm kích thước khung cửa sổ sao cho diện tích cửa sổ lớn nhất (để hứng được nhiều ánh sáng nhất)?



Lời giải

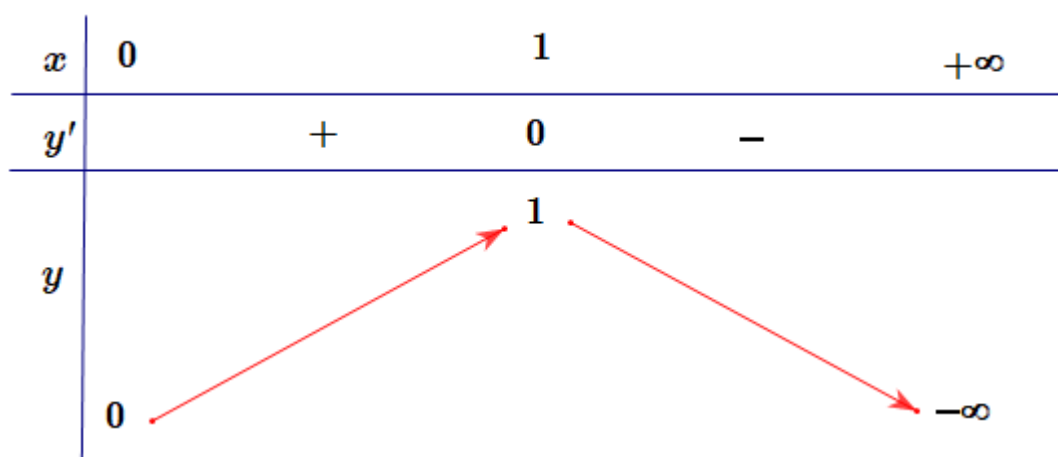
Gọi a, b lần lượt là chiều dài và chiều rộng của cửa sổ ($m; a, b > 0$)

Chu vi cửa sổ là: $2(a + b) = 4 \Leftrightarrow b = 2 - a$

Diện tích cửa sổ là: $y = ab = a(2 - a) = -a^2 + 2a$

$$y' = -2a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên, ta thấy $\max_{(0;+\infty)} y = y(1) = 1$

Vậy để diện tích cửa sổ lớn nhất bằng $1m^2$ thì chiều dài và chiều rộng bằng nhau và bằng $1m$

Câu 17. Khối lượng $q(kg)$ của một mặt hàng mà cửa tiệm bán được trong một ngày phụ thuộc vào giá bán p (nghìn đồng/kg) theo công thức $p = 15 - \frac{1}{2}q$. Doanh thu từ việc bán mặt hàng trên của cửa tiệm được tính theo công thức $R = pq$.

a) Viết công thức biểu diễn R theo p .

b) Tìm giá bán mỗi kilôgam sản phẩm để đạt được doanh thu cao nhất và xác định doanh thu cao nhất đó.

Lời giải

a) Ta có: $p = 15 - \frac{1}{2}q \Leftrightarrow q = 2(15 - p)$

Thay vào $R = pq$ ta được: $R = p \cdot 2(15 - p) = -2p^2 + 30p$

b) Đặt $y = -2p^2 + 30p$

Tập xác định: $D = (0; +\infty)$

$$y' = -4p + 30 = 0 \Leftrightarrow p = 7,5$$

Bảng biến thiên:

x	0	7,5	$+\infty$	
y'		+	0	-
y	0	112,5	$-\infty$	

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\max_D y = y(7,5) = 112,5$

Vậy nếu giá bán mỗi kilôgam sản phẩm là 7,5 nghìn đồng/kg thì sẽ đạt được doanh thu cao nhất là 112,5 nghìn đồng

Câu 18. Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức

$$V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4; 0 \leq t \leq 0,5.$$

a) Ban đầu trong bình xăng có bao nhiêu lít xăng?

b) Sau khi bơm 30 giây thì bình xăng đầy. Hỏi dung tích của bình xăng trong xe là bao nhiêu lít?

c) Khi xăng chảy vào bình xăng, gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \leq t \leq 0,5$. Xăng chảy vào bình xăng ở thời điểm nào có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất?

Lời giải

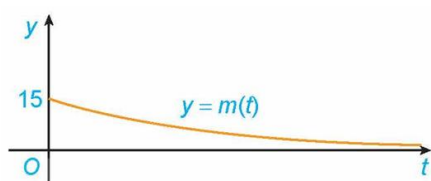
a) Ban đầu bình xăng có $V(0) = 4$ lít xăng.

b) Sau khi bơm 30s, ta có $V(0,5) = 41,5$ l

c) Ta có: $V'(t) = 300(2t - 3t^2)$

Nhận xét: $V'(t)$ có đồ thị là một parabol nên tốc độ tăng thể tích đạt giá trị lớn nhất bằng 100 tại $t = \frac{1}{3}$ s.

Câu 19. Giả sử khối lượng còn lại của một chất phóng xạ (gam) sau t ngày phân rã được cho bởi hàm số $m(t) = 15e^{-0,012t}$.



Khối lượng $m(t)$ thay đổi ra sao khi $t \rightarrow +\infty$?

Điều này thể hiện trên Hình như thế nào?

Lời giải

Ta có: $\lim_{t \rightarrow +\infty} m(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 15e^{-0,012t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{15}{e^{0,012t}} = 0$

Do đó, $m(t) \rightarrow 0$ khi $t \rightarrow +\infty$.

Trong hình, khi $t \rightarrow +\infty$ thì $m(t)$ càng gần trục hoành Ot (nhưng không chạm trục Ot).

Câu 20. Để loại bỏ $p\%$ một loài tảo độc khỏi một hồ nước, người ta ước tính chi phí bỏ ra là

$$C(p) = \frac{45p}{100-p} \text{ (triệu đồng), với } 0 \leq p < 100.$$

Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(p)$ và nêu ý nghĩa thực tiễn của đường tiệm cận này.

Lời giải

Ta có: $\lim_{p \rightarrow 100^-} C(p) = \lim_{p \rightarrow 100^-} \frac{45p}{100-p} = +\infty$ nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(p)$ là $p = 100$.

Ý nghĩa của đường tiệm cận là: Không thể loại bỏ hết loài tảo độc ra khỏi hồ nước dù chi phí là bao nhiêu.

Câu 21. Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là

$$C(x) = 2x + 50 \text{ (triệu đồng)}$$

Khi đó $f(x) = \frac{C(x)}{x}$ là chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm. Chứng tỏ rằng hàm số

$f(x)$ giảm và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Tính chất này nói lên điều gì?

Lời giải

Ta có: $f(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{2x+50}{x}$

Vì $f'(x) = \frac{-50}{x^2} < 0$ với mọi số thực x nên hàm số $f(x) = \frac{C(x)}{x}$ giảm.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+50}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+\frac{50}{x}}{1} = 2 \text{ (đpcm)}$$

Tính chất này nói lên: Khi sản xuất càng nhiều sản phẩm thì chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm càng giảm, nhưng không dưới 2.

Câu 22. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng $144 m^2$. Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là $x(m)$.

a) Viết biểu thức tính chu vi $P(x)$ (mét) của mảnh vườn.

b) Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $P(x)$.

Lời giải

a) Độ dài cạnh còn lại của mảnh vườn là: $\frac{144}{x}(m)$

Chu vi của mảnh vườn là: $P(x) = 2\left(x + \frac{144}{x}\right) = 2x + \frac{288}{x}(m)$

b) Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + \frac{288}{x}\right) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + \frac{288}{x}\right) = -\infty$

Do đó, đồ thị hàm số $P(x)$ không có tiệm cận ngang.

Vì $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2x + \frac{288}{x}\right) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2x + \frac{288}{x}\right) = +\infty$

Do đó, đồ thị hàm số $P(x)$ có tiệm cận đứng là $x = 0$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [P(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + \frac{288}{x} - 2x\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{288}{x} = 0$

Do đó, đồ thị hàm số $P(x)$ có tiệm cận xiên là: $y = 2x$.

Câu 23. Trong Hình, đường viền bóng của đèn ngủ lên tường là đồ thị của hàm số $y = 55 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 144}$ với x và y tính bằng đơn vị centimét.



Chứng minh rằng $y = 55 - \frac{1}{2}x$ là một tiệm cận xiên của đồ thị hàm số này.

Giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(55 - \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 144} \right) - \left(55 - \frac{1}{2} x \right) \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (x - \sqrt{x^2 + 144}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{-144}{x + \sqrt{x^2 + 144}} \right) = 0.\end{aligned}$$

$$\text{Tương tự ta cũng có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(55 - \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 144} \right) - \left(55 - \frac{1}{2} x \right) \right] = 0.$$

Do đó $y = 55 - \frac{1}{2}x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = 55 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 144}$.

Câu 24. Nếu trong một ngày, một xưởng sản xuất được x kilôgam sản phẩm thì chi phí trung bình (tính bằng nghìn đồng) cho một sản phẩm được cho bởi công thức:

$$C(x) = \frac{50x + 2000}{x}.$$

Tìm các đường tiệm cận của hàm số $C(x)$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} C(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{50x + 2000}{x} = \frac{2000}{0} = +\infty; \lim_{x \rightarrow 0^-} C(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{50x + 2000}{x} = \frac{2000}{0} = +\infty$$

Vậy tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{50x + 2000}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{50 + \frac{2000}{x}}{1} = 50; \lim_{x \rightarrow -\infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{50x + 2000}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{50 + \frac{2000}{x}}{1} = 50$$

Vậy tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng $y = 50$

Câu 25. Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian t cho bởi công thức $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$, với y được tính theo mg/l và t được tính theo giờ, $t \geq 0$. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y(t)$. Từ đó, có nhận xét gì về nồng độ oxygen trong hồ khi thời gian t trở nên rất lớn?

Lời giải

$$\text{Xét } y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$$

$$\text{Ta có: } \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{15t}{9t^2 + 1} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{45t^2 - 15t + 5}{9t^2 + 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{45 - \frac{15}{t} + \frac{5}{t^2}}{9 + \frac{1}{t^2}} = 5$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(5 - \frac{15t}{9t^2 + 1} \right) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{45t^2 - 15t + 5}{9t^2 + 1} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{45 - \frac{15}{t} + \frac{5}{t^2}}{9 + \frac{1}{t^2}} = 5$$

Vậy đường thẳng $y = 5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Nhận xét: Khi thời gian t trở nên rất lớn, nồng độ oxygen trong hồ tiến dần về $5mg/l$

Câu 26. Một bể chứa 5000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 30 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 25 lít/phút.

a) Chứng tỏ nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là $f(t) = \frac{30t}{200+t}$.

b) Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

c) Nêu nhận xét về nồng độ muối trong bể sau thời gian t ngày càng lớn.

Giải

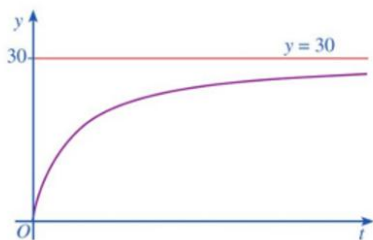
a) Sau t phút, ta có: khối lượng muối trong bể là $25 \cdot t = 750t$ (gam); thể tích của lượng nước trong bể là $5000 + 25t$ (lít). Vậy nồng độ muối sau t phút là

$$f(t) = \frac{750t}{5000 + 25t} = \frac{30t}{200 + t} \text{ (gam/lít)}.$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{200 + t} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(30 - \frac{6000}{200 + t} \right) = 30. \end{aligned}$$

Vậy đường thẳng $y = 30$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ (Hình).



c) Ta có đồ thị hàm số $y = f(t)$ nhận đường thẳng $y = 30$ làm tiệm cận ngang, tức là

khi t càng lớn thì nồng độ muối trong bể sẽ tiến gần đến mức 30 (gam/lít). Lúc đó, nồng độ muối trong bể sẽ gần như bằng nồng độ muối trong nước muối được bơm vào bể.

Câu 27. Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong x (tháng) được tính theo công thức $S(x) = 200 \left(5 - \frac{9}{2+x} \right)$, trong đó $x \geq 1$.

a) Xem $y = S(x)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

b) Nêu nhận xét về số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong x (tháng) khi x đủ lớn.

Lời giải

a) Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 200 \left(5 - \frac{9}{2+x} \right) = 1000$

Vậy đường thẳng $y = 1000$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $S(x)$

b) Khi x đủ lớn thì số lượng sản phẩm bán được của công ti đó trong tháng x sẽ gần đạt được 1000 sản phẩm

Câu 28. Một cốc chứa 30ml dung dịch KOH (potassium hydroxide) với nồng độ $100mg / ml$. Một bình chứa dung dịch KOH khác với nồng độ $8mg / ml$ được trộn vào cốc.

a) Tính nồng độ KOH trong cốc sau khi trộn $x(ml)$ từ bình chứa, kí hiệu là $C(x)$.

b) Coi $C(x)$ là hàm số xác định với $x \geq 0$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số này.

c) Giải thích tại sao nồng độ KOH trong cốc giảm theo x nhưng luôn lớn hơn 8 mg/ml.

Lời giải

a) Khối lượng dung dịch trong cốc sau khi trộn $x(ml) KOH$ từ bình chứa là:
 $m = 30.100 + 8x = 8x + 3000(mg)$

Thể tích dung dịch trong cốc sau khi trộn $x(ml) KOH$ từ bình chứa là: $V = 30 + x(ml)$

Nồng độ KOH trong cốc sau khi trộn $x(ml)$ từ bình chứa là:

$$C(x) = \frac{m}{V} = \frac{8x + 3000}{30 + x} (mg / ml)$$

b) Khảo sát hàm số $y = C(x) = \frac{8x + 3000}{x + 30}$ với $x \geq 0$.

1. Tập xác định của hàm số: $[0; +\infty)$

2. Sự biến thiên:

$$C'(x) = \frac{-2760}{(x + 30)^2} < 0, \forall x \geq 0$$

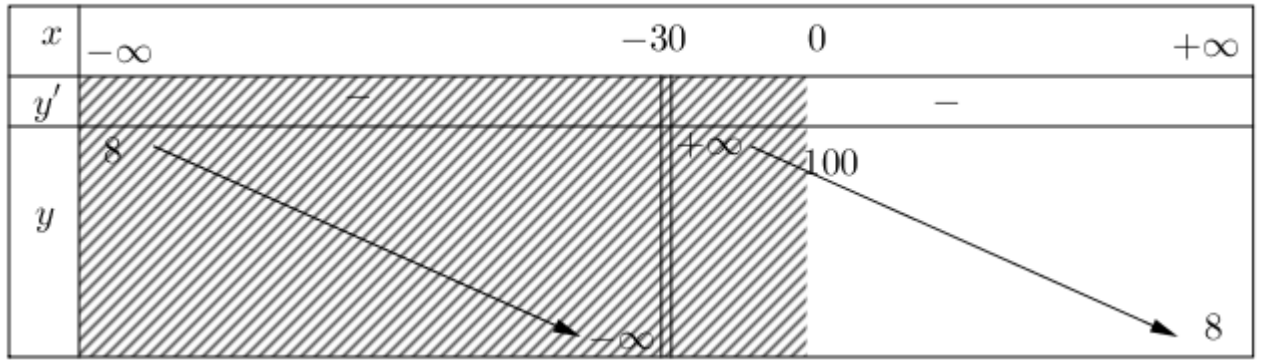
Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x + 3000}{x + 30} = 8.$$

Do đó, đồ thị hàm số $y = C(x) = \frac{8x + 3000}{x + 30}$ nhận đường thẳng $y = 8$ làm tiệm cận ngang (phần bên phải trục Oy)

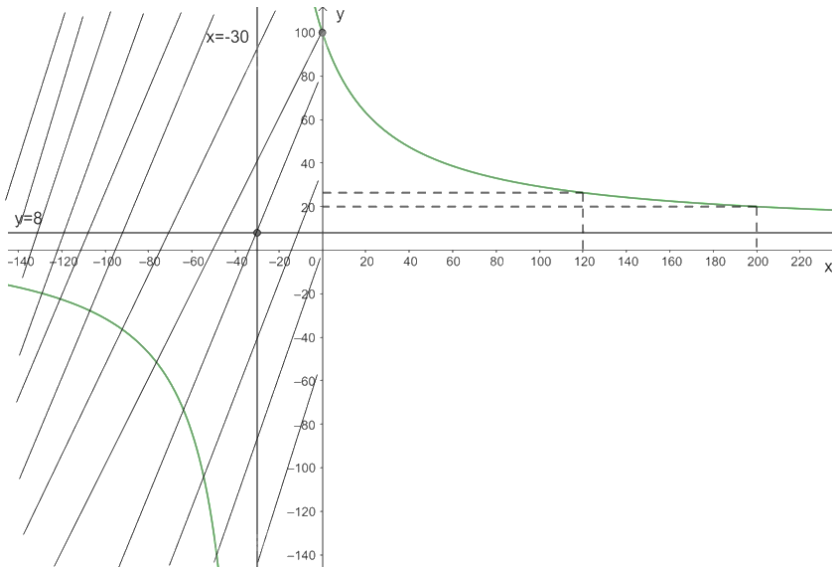
Bảng biến thiên:



3. Đồ thị: Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $(0; 100)$.

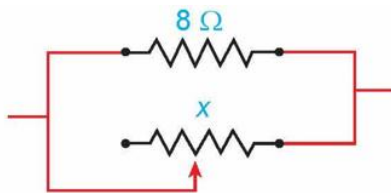
Đồ thị hàm số $y = C(x) = \frac{8x + 3000}{x + 30}$ đi qua các điểm $(200; 20); \left(120; \frac{132}{5}\right)$.

Đồ thị của hàm số $y = C(x) = \frac{8x + 3000}{x + 30}$ với $x \geq 0$ là phần nét màu xanh không bị gạch chéo.



c) Vì $C'(x) = \frac{-2760}{(x + 30)^2} < 0, \forall x \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x + 3000}{x + 30} = 8$ nên nồng độ KOH trong cốc giảm theo x nhưng luôn lớn hơn $8mg/ml$

Câu 29. Trong Vật lí, ta biết rằng khi mắc song song hai điện trở R_1 và R_2 thì điện trở tương đương R của mạch điện được tính theo công thức $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (theo Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).



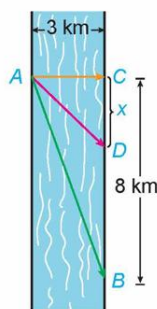
Giả sử một điện trở 8Ω được mắc song song với một biến trở như Hình. Nếu điện trở đó được kí hiệu là $x(\Omega)$ thì điện trở tương đương R là hàm số của x . Vẽ đồ thị của hàm số $y = R(x), x > 0$ và dựa vào đồ thị đã vẽ, hãy cho biết:

Đồ thị hàm số $y = R(x) = \frac{8x}{x+8}$ đi qua các điểm $(8; 4); \left(12; \frac{24}{5}\right)$.

a) Vì $R'(x) = \frac{64}{(x+8)^2} > 0, \forall x > 0$ nên khi x tăng thì điện trở tương đương của mạch tăng.

b) Vì $R'(x) = \frac{64}{(x+8)^2} > 0, \forall x > 0$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x}{x+8} = 8$ nên điện trở tương đương của mạch không bao giờ vượt quá 8Ω .

Câu 30. Anh An chèo thuyền từ điểm A trên bờ một con sông thẳng rộng 3 km và muốn đến điểm B ở bờ đối diện cách 8 km về phía hạ lưu càng nhanh càng tốt. Anh An có thể chèo thuyền trực tiếp qua sông đến điểm C rồi chạy bộ đến B , hoặc anh có thể chèo thuyền thẳng đến B , hoặc anh cũng có thể chèo thuyền đến một điểm D nào đó giữa C và B rồi chạy bộ đến B . Nếu vận tốc chèo thuyền là 6 km/h và vận tốc chạy bộ là 8 km/h thì anh An phải chèo thuyền sang bờ ở điểm nào để đến được B càng sớm càng tốt? (Giả sử rằng vận tốc của nước là không đáng kể so với vận tốc chèo thuyền của anh An).



Lời giải

Gọi độ dài đoạn CD là $x(\text{km}) (0 < x < 8)$

Quãng đường AD dài: $\sqrt{AC^2 + DC^2} = \sqrt{9 + x^2} (\text{km})$

Quãng đường BD dài $8 - x (\text{km})$

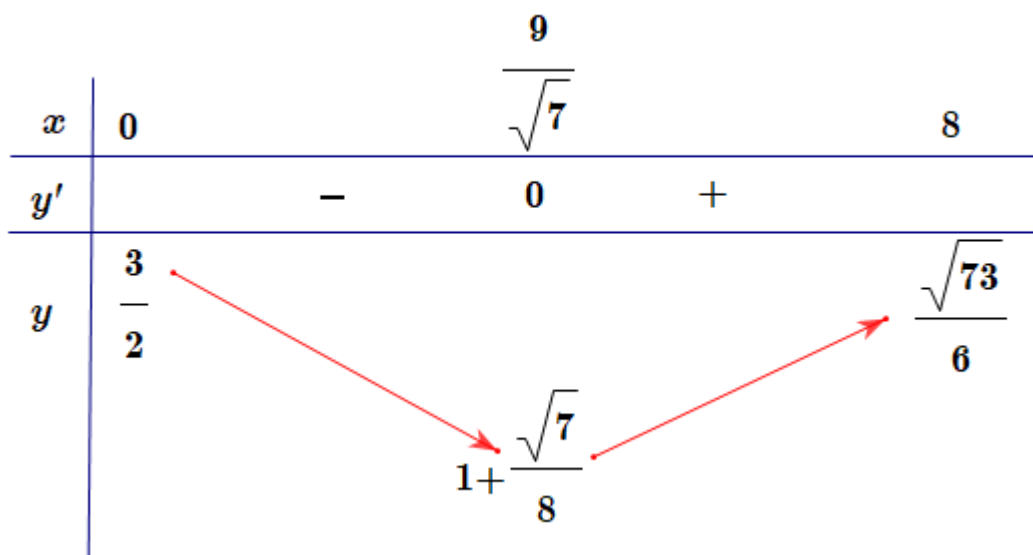
Thời gian người đó đi đến B bằng cách chèo thuyền đến một điểm D nào đó giữa C và B rồi chạy bộ đến B là: $\frac{\sqrt{9+x^2}}{6} + \frac{8-x}{8}$ (giờ)

Xét hàm số $y = \frac{\sqrt{9+x^2}}{6} + \frac{8-x}{8}$ với $0 < x < 8$

Ta có: $y' = \frac{x}{6\sqrt{9+x^2}} - \frac{1}{8}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{9+x^2}} - \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow 4x = 3\sqrt{9+x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2 = 9(9+x^2) \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{81}{7} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}}$$

Bảng biến thiên:



Vậy anh An phải chèo thuyền sang bờ ở điểm D cách B một khoảng bằng $\frac{9}{\sqrt{7}} km$ thì đến B sớm nhất.

Câu 31. Giả sử chi phí (tính bằng trăm nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị hàng hoá nào đó là:
 $C(x) = 23000 + 50x - 0,5x^2 + 0,00175x^3$.

- Tìm hàm chi phí biên.
- Tìm $C'(100)$ và giải thích ý nghĩa của nó.
- So sánh $C'(100)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 101.

Lời giải

- Hàm chi phí biên là: $C'(x) = 0,00525x^2 - x + 50$.
- Ta có: $C'(100) = 0,00525 \cdot 100^2 - 100 + 50 = 2,5$ (trăm nghìn đồng)
 Chi phí biên tại $x = 100$ là 250000 đồng, nghĩa là chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo (đơn thứ 101) là khoảng 250000 đồng.
- Chi phí sản xuất đơn hàng thứ 101 là:
 $C(101) - C(100) = 24752,52675 - 24750 = 2,52675$ (trăm nghìn đồng)

Câu 32. Giả sử hàm cầu đối với một loại hàng hoá được cho bởi công thức

$p = \frac{354}{1 + 0,01x}$, $x \geq 0$, trong đó p là giá bán (nghìn đồng) của mỗi đơn vị sản phẩm và x là số lượng đơn vị sản phẩm đã bán.

- Tìm công thức tính x như là hàm số của p . Tìm tập xác định của hàm số này. Tính số đơn vị sản phẩm đã bán khi giá bán của mỗi đơn vị sản phẩm là 240 nghìn đồng.
- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $x = x(p)$. Từ đồ thị đã vẽ, hãy cho biết:
 - Số lượng đơn vị sản phẩm bán được sẽ thay đổi thế nào khi giá bán p tăng;
 - Ý nghĩa thực tiễn của giới hạn $\lim_{p \rightarrow 0^+} x(p)$.

Lời giải

a) Vì $p = \frac{354}{1+0,01x} \Rightarrow p(1+0,01x) = 354 \Rightarrow p + 0,01px = 354 \Rightarrow x = \frac{354-p}{0,01p}$

Tập xác định của hàm số là: $(0; 354]$

Với $p = 240$ ta có: $x = \frac{354-240}{0,01 \cdot 240} = 47,5$

Vậy với giá bán mỗi đơn vị sản phẩm là 240 nghìn đồng thì bán được 47,5 đơn vị sản phẩm.

b) Khảo sát sự biến thiên của hàm số: $x = x(p) = \frac{354-p}{0,01p}$

1. Tập xác định của hàm số: $(0; 354]$

2. Sự biến thiên:

Ta có: $x'(p) = \frac{-3,54}{(0,01p)^2} < 0$ với mọi $p \in (0; 354]$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 354)$.

Hàm số không có cực trị.

Giới hạn: $\lim_{p \rightarrow 0^+} x(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{354-p}{0,01p} = +\infty$

Do đó, đồ thị hàm số $x = x(p) = \frac{354-p}{0,01p}$ với $p \in (0; 354]$ nhận đường thẳng $p = 0$ làm tiệm cận đứng.

Bảng biến thiên:

x	0	354
y'		-
y	$+\infty$	0

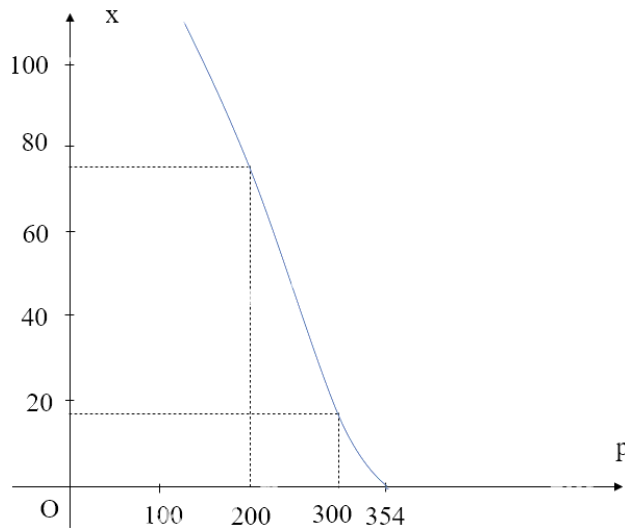
3. Đồ thị:

Ta có: $f(p) = 0 \Leftrightarrow \frac{354-p}{0,01p} = 0 \Leftrightarrow p = 354$

Đồ thị hàm số $x = f(p) = \frac{354-p}{0,01p}$ cắt trục hoành tại điểm $(354; 0)$.

Đồ thị hàm số $x = f(p) = \frac{354-p}{0,01p}$ đi qua các điểm $(300;18); (200;77)$.

Đồ thị hàm số $x = f(p) = \frac{354-p}{0,01p}$ với $p \in (0;354]$ là đường màu xanh:

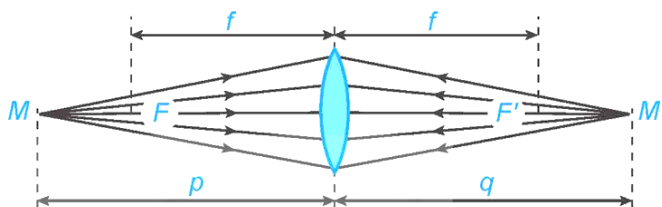


- Số lượng đơn vị sản phẩm bán sẽ giảm đi khi giá bán tăng, và sẽ không bán được sản phẩm nào nếu giá bán là 354 nghìn đồng

- Ý nghĩa thực tiễn của giới hạn $\lim_{p \rightarrow 0^+} x(p)$: Vì $\lim_{p \rightarrow 0^+} x(p) = +\infty$ nên giá bán càng thấp thì số lượng đơn vị sản phẩm sẽ bán được càng nhiều.

Câu 33. Xét một thấu kính hội tụ có tiêu cự f . Khoảng cách p từ vật đến thấu kính liên hệ với khoảng cách q từ ảnh đến thấu kính bởi hệ thức:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$



a) Viết công thức tính $q = g(p)$ như một hàm số của biến $p \in (f; +\infty)$.

b) Tính các giới hạn $\lim_{p \rightarrow +\infty} g(p)$; $\lim_{p \rightarrow f^+} g(p)$ và giải thích ý nghĩa các kết quả này.

c) Lập bảng biến thiên của hàm số $q = g(p)$ trên khoảng $(f; +\infty)$.

Lời giải

a) Ta có: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow q = \frac{pf}{p-f}$. Do đó, $q = g(p) = \frac{pf}{p-f}$ với $p \in (f; +\infty)$.

b) $\lim_{p \rightarrow +\infty} g(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{pf}{p-f} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{f}{1 - \frac{f}{p}} = f$, $\lim_{p \rightarrow f^+} g(p) = \lim_{p \rightarrow f^+} \frac{pf}{p-f} = +\infty$

Ý nghĩa của $\lim_{p \rightarrow +\infty} g(p) = f$: Khoảng cách từ vật đến thấu kính tiến ra vô cùng thì khoảng cách từ ảnh đến thấu kính xấp xỉ tiêu cự.

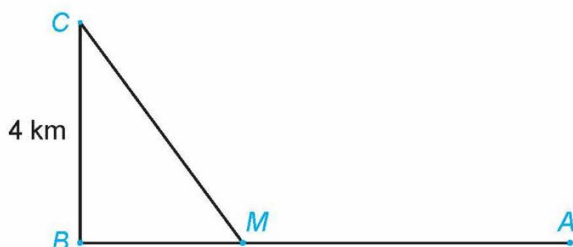
Ý nghĩa của $\lim_{p \rightarrow f^+} g(p) = +\infty$: Khoảng cách từ vật đến thấu kính tiến gần về tiêu cự f thì khoảng cách từ ảnh đến thấu kính là càng lớn.

c) Ta có: $q' = g'(p) = \frac{-f^2}{(p-f)^2} < 0 \forall p \in (f; +\infty)$ nên hàm số nghịch biến trên $(f; +\infty)$.

Bảng biến thiên:

p	f	$+\infty$
$g'(p)$		-
$g(p)$	$+\infty$	f

Câu 34. Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C như Hình. Khoảng cách từ C đến B là 4 km . Bờ biển chạy thẳng từ A đến B với khoảng cách là 10 km . Tổng chi phí lắp đặt cho 1 km dây điện trên biển là 50 triệu đồng, còn trên đất liền là 30 triệu đồng.



Xác định vị trí điểm M trên đoạn AB (điểm nối dây từ đất liền ra đảo) để tổng chi phí lắp đặt là nhỏ nhất.

Lời giải

Đặt $MB = x(\text{km}, 0 \leq x \leq 10)$, khi đó, $AM = 10 - x(\text{km})$ và $MC = \sqrt{MB^2 + CB^2} = \sqrt{x^2 + 16}(\text{km})$

Khi đó, chi phí nối điện từ A đến C là: $f(x) = 30(10 - x) + 50\sqrt{x^2 + 16}$ (triệu đồng)

Ta có: $f'(x) = -30 + \frac{50x}{\sqrt{x^2 + 16}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 25x^2 = 9x^2 + 144 \Leftrightarrow x = 3$

(do $0 \leq x \leq 10$)

Ta có: $f(0) = 500$; $f(3) = 460$; $f(10) = 100\sqrt{29}$ nên chi phí nhỏ nhất là 460 triệu đồng khi $x = 3$

Vậy M cách B một khoảng 3 km trên đoạn AB (điểm nối dây từ đất liền ra đảo) thì tổng chi phí lắp đặt là nhỏ nhất.

Câu 35. Khi một vật lạ mắc kẹt trong khí quản khiến ta phải ho, cơ hoành đẩy lên trên gây ra tăng áp lực trong phổi, theo đó cuống họng co thắt làm hẹp khí quản khiến không khí đi qua mạnh hơn. Đối với một lượng không khí bị đẩy ra trong một khoảng thời gian cố định, khí quản càng nhỏ thì luồng không khí càng đẩy ra nhanh hơn. Vận tốc luồng khí thoát ra càng cao, lực tác động lên vật lạ càng lớn. Qua nghiên cứu một số trường hợp, người ta nhận thấy vận tốc v của luồng khí liên hệ với bán kính x của khí quản theo công thức:

$$v(x) = k(x_0 - x)x^2, \frac{1}{2}x_0 \leq x \leq x_0$$
 trong đó k là hằng số ($k > 0$) và x_0 là bán kính khí quản ở trạng thái bình thường. Tìm x theo x_0 để vận tốc của luồng khí một cơn ho trong trường hợp này là lớn nhất.

(Nguồn: James Stewart, J. (2015). Calculus. Cengage Learning 8th edition, p.285)

Giải

Xét hàm số $f(x) = (x_0 - x)x^2$ với x_0 cố định và $\frac{1}{2}x_0 \leq x \leq x_0$.

Do k là hằng số nên vận tốc của luồng khí một cơn ho lớn nhất khi $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $f(x) = -x^3 + x_0x^2$;

$f'(x) = -3x^2 + 2x_0x$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = \frac{2}{3}x_0$.

Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{2}x_0$	$\frac{2}{3}x_0$	x_0
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f(\frac{1}{2}x_0)$	$f(\frac{2}{3}x_0)$	$f(x_0)$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\max_{[\frac{1}{2}x_0; x_0]} f(x) = f(\frac{2}{3}x_0)$.

Vậy vận tốc của luồng khí một cơn ho lớn nhất khi $x = \frac{2}{3}x_0$.

Câu 36. Giả sử chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,...) được cho bởi công thức:

$C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 10000$, trong đó $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng.

a) Tính tổng chi phí $T(x)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí.

b) Tỷ số $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn.

Tính $M(x)$ theo x và tìm số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình là thấp nhất, biết rằng nhu cầu hiện tại xuất bản không quá 30000 cuốn. Khi đó chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí là bao nhiêu?

Giải

a) Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng, tức là 0,4 vạn đồng.

Suy ra chi phí phát hành cho x cuốn là $0,4x$ (vạn đồng).

Theo đề bài, ta có tổng chi phí xuất bản và phát hành cho x cuốn tạp chí là:

$$T(x) = C(x) + 0,4x = 0,0001x^2 + 0,2x + 10000, x > 0.$$

b) Ta có $M(x) = \frac{T(x)}{x} = 0,0001x + 0,2 + \frac{10000}{x}$.

Xét hàm số $f(x) = 0,0001x + 0,2 + \frac{10000}{x}$, với $0 < x \leq 30000$.

$$f'(x) = 0,0001 - \frac{10000}{x^2} = \frac{0,0001x^2 - 10000}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10000 \text{ (do } x > 0 \text{)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

Bảng biến thiên:

x	0	10 000	30 000	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(10\,000)$	$f(30\,000)$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị của $M(x)$ nhỏ nhất khi $x = 10000$.

Vậy số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình thấp nhất là $x = 10000$ (cuốn).

Chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản 10000 cuốn là: $M(10000) = 22000$ (đồng)

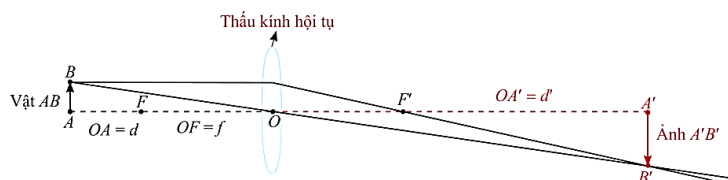
Câu 37. Xét một vật thật đặt trước thấu kính hội tụ có tiêu cự $f > 0$. Gọi d là khoảng cách từ vật đến thấu kính ($d > 0$), d' là khoảng cách từ thấu kính đến ảnh (ảnh thật thì $d' > 0$, ảnh ảo thì $d' < 0$). Ta có công thức: $\frac{1}{f} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d'}$ hay $d' = \frac{df}{d-f}$.

Xét trường hợp $f = 3$, đặt $x = d, y = d'$. Ta có hàm số $y = \frac{3x}{x-3}$ và $x \neq 3$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số trên.

b) Dựa vào đồ thị hàm số trên, hãy cho biết vị trí của vật để ảnh của vật là: ảnh thật, ảnh ảo.

c) Khi vật tiến gần đến tiêu điểm thì ảnh thay đổi như thế nào?



Lời giải

a) $y = \frac{3x}{x-3}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

- Chiều biến thiên:

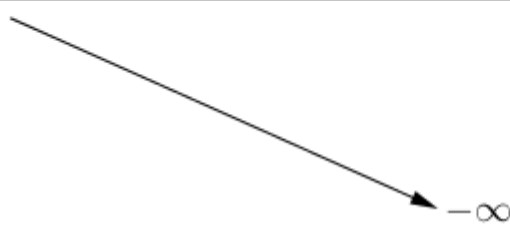
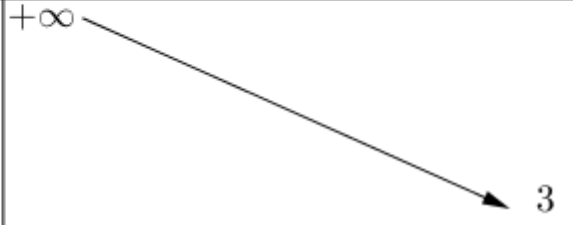
$$y' = \frac{-9}{(x-3)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \forall x \in D \text{ nên hàm số nghịch biến trên } D$$

- Giới hạn và tiệm cận:

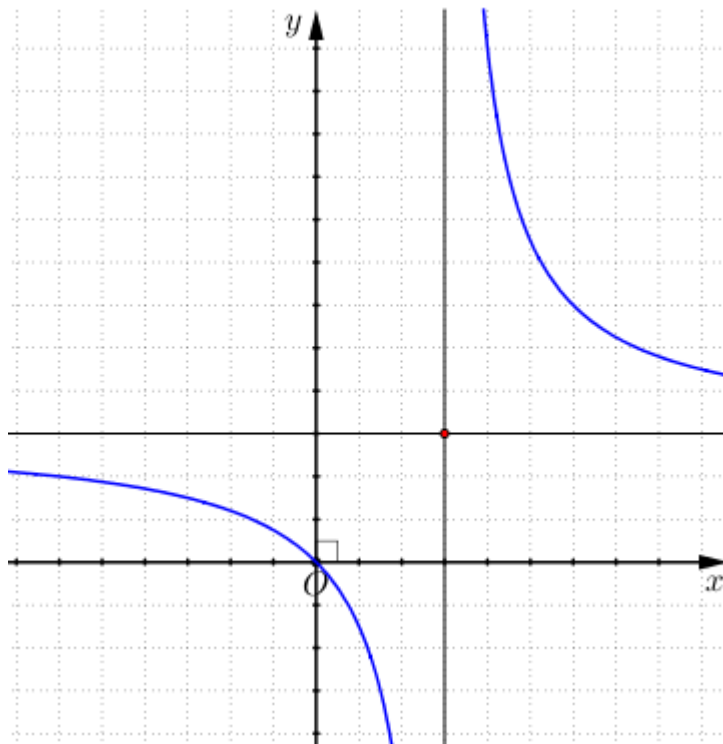
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x-3} = 3; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x}{x-3} \right) = 3 \text{ nên } y = 3 \text{ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} y = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x}{x-3} = +\infty; \lim_{x \rightarrow 3^-} y = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x}{x-3} = -\infty \text{ nên } x = 3 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số}$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	3				

Khi $x = 0$ thì $y = 0$ nên $(0;0)$ là giao điểm của y với trục Oy , Ox

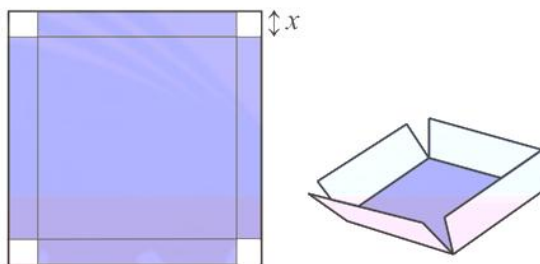


b) Để ảnh của vật là ảnh thật thì $d' > 0$ hay $y > 0 \Rightarrow x < 0$ hoặc $x > 3$ hay $d > 3$ (do d là khoảng cách từ vật đến thấu kính nên d không thể nhỏ hơn 0)

Để ảnh của vật là ảnh ảo thì $d' < 0$ hay $y < 0 \Rightarrow 0 < x < 3$ hay $0 < d < 3$

c) Khi vật tiến gần đến tiêu điểm thì khoảng cách từ ảnh đến thấu kính tiến dần tới vô cùng, ảnh của vật dần biến thành ảnh ảo

Câu 38. Bạn Việt muốn dùng tấm bìa hình vuông cạnh $6dm$ làm một chiếc hộp không nắp, có đáy là hình vuông bằng cách cắt bỏ đi 4 hình vuông nhỏ ở bốn góc của tấm bìa (Hình).



Bạn Việt muốn tìm độ dài cạnh hình vuông cần cắt bỏ để chiếc hộp đạt thể tích lớn nhất.

a) Hãy thiết lập hàm số biểu thị thể tích hộp theo x với x là độ dài cạnh hình vuông cần cắt đi.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số tìm được.

Từ đó, hãy tư vấn cho bạn Việt cách giải quyết vấn đề và giải thích vì sao cần chọn giá trị này. (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

Lời giải

a) Chiều cao của hộp sau khi cắt là: x

Chiều dài của hộp sau khi cắt là: $6 - 2x$

Chiều rộng của hộp sau khi cắt là: $6 - 2x$

Thể tích của hộp là: $V(x) = x(6 - 2x)^2 = 4x^3 - 24x^2 + 36x$

b) Tập xác định: $D = (0; 3)$

- Chiều biến thiên:

$$V'(x) = 12x^2 - 48x + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

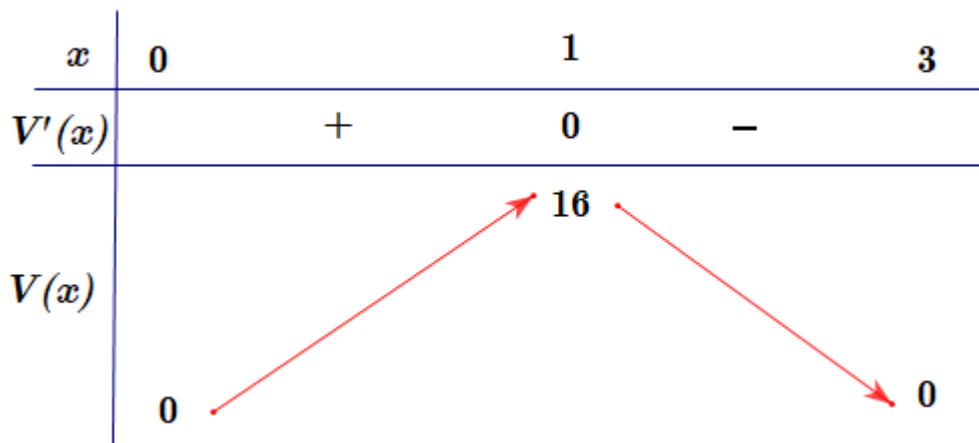
Trên các khoảng $(0; 1)$, $(3; +\infty)$ thì $V'(x) > 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó. Trên khoảng $(1; 3)$ thì $V'(x) < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng đó.

· Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và $y_{cd} = 16$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ và $y_{ct} = 0$

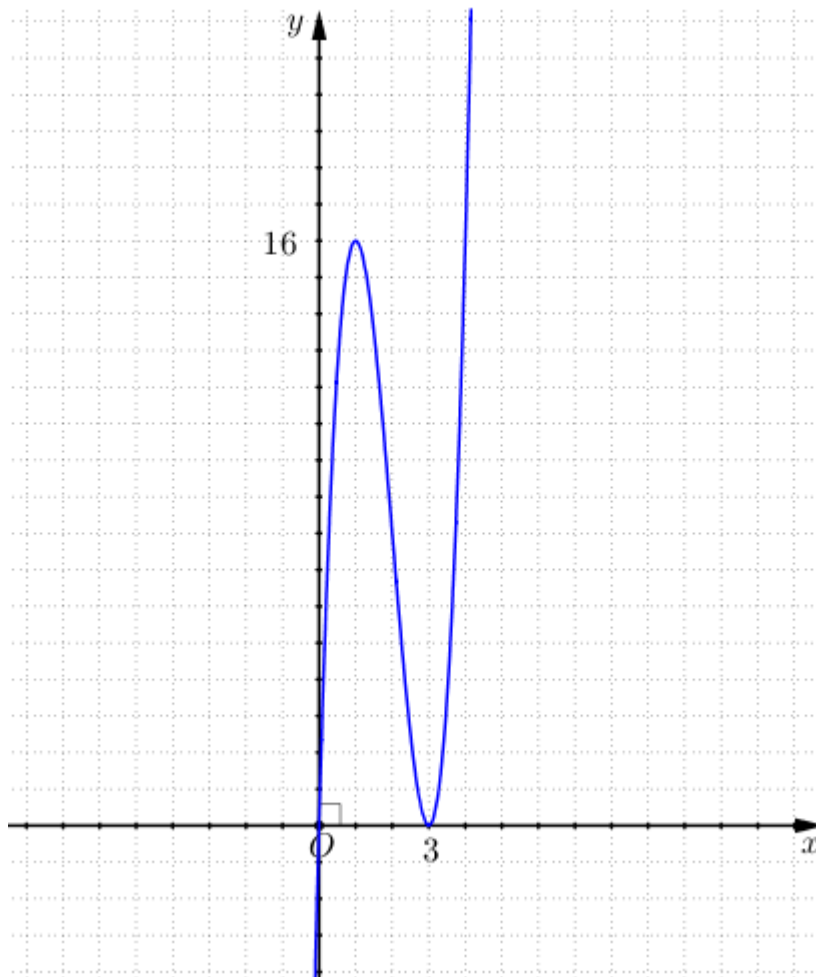
- Bảng biến thiên:



Khi $x = 0$ thì $V(x) = 0$ nên $(0;0)$ là giao điểm của đồ thị với trục Oy

Ta có: $V(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 24x^2 + 36x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

Vậy đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $(0;0)$ và $(3;0)$



Vì $0 < x < 3$ (vì ở mỗi cạnh đều cắt đi 2 đầu nên nếu $x \geq 3$ thì bạn Việt phải cắt hết tám bìa. Do đó, bạn Việt nên cắt đi 4 hình vuông ở góc có cạnh bằng $1dm$ để thể tích của hộp đạt giá trị lớn nhất là $16dm^3$.

Câu 39. Trong một nhà hàng, mỗi tuần đề chế biến x phần ăn (x lấy giá trị trong khoảng từ 30 đến 120) thì chi phí trung bình (đơn vị: nghìn đồng) của một phần ăn được cho bởi công thức:

$$\bar{C}(x) = 2x - 230 + \frac{7200}{x}.$$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $\bar{C}(x)$ trên $[30;120]$.

b) Từ kết quả trên, tìm số phần ăn sao cho chi phí trung bình của một phần ăn là thấp nhất.

Lời giải

Tập xác định: $D = [30;120]$

- Chiều biến thiên:

$$\bar{C}'(x) = 2 - \frac{7200}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -60 (\text{loại}) \\ x = 60 \end{cases}$$

Trên các khoảng $(30;60)$ thì $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng đó. Trên khoảng $(60;120)$ thì $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng đó.

- Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x = 60$ và $y_{cd} = 10$

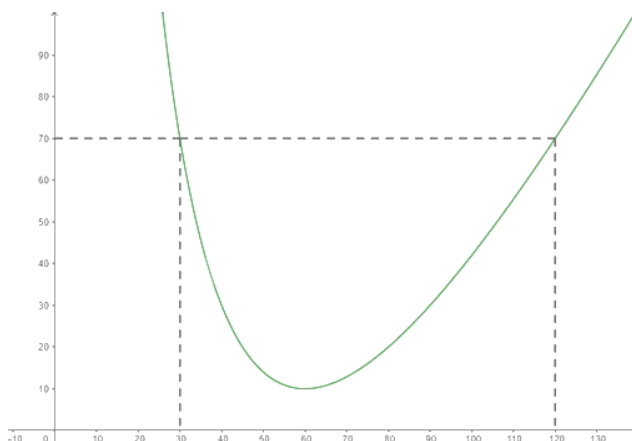
- Các giới hạn tại vô cực:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{C}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x - 230 + \frac{7200}{x} \right) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{C}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - 230 + \frac{7200}{x} \right) = +\infty$$

- Bảng biến thiên:

x	30	60	120		
y'		-	0	+	
y	70		10		70

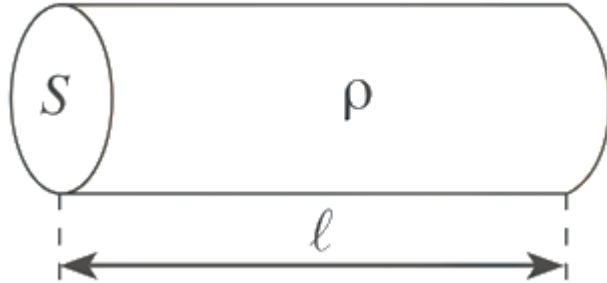
Đồ thị hàm số:



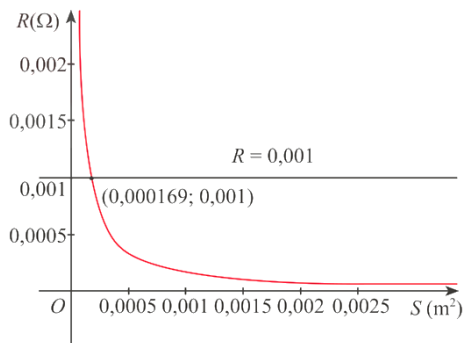
b) Từ bảng biến thiên, ta thấy $\min_{[30;120]} \bar{C}(x) = \bar{C}(60) = 10$

Vậy để chi phí trung bình của một phần ăn là thấp nhất thì số phần ăn là 10

Câu 40. Điện trở $R(\Omega)$ của một đoạn dây dẫn hình trụ được làm từ vật liệu có điện trở suất $\rho(\Omega m)$, chiều dài $\ell(m)$ và tiết diện $S(m^2)$ được cho bởi công thức $R = \rho \frac{\ell}{S}$



Giả sử người ta khảo sát sự biến thiên của điện trở R theo tiết diện S (ở nhiệt độ $20^\circ C$) của một sợi dây điện dài $10m$ làm từ kim loại có điện trở suất ρ và thu được đồ thị hàm số như Hình.



a) Có nhận xét gì về sự biến thiên của điện trở R theo tiết diện S ?

b) Từ đồ thị, hãy giải thích ý nghĩa của toạ độ giao điểm của đồ thị hàm số với đường thẳng $R = 0,001$.

c) Tính điện trở suất ρ của dây điện. Từ đó, hãy cho biết dây điện được làm bằng kim loại nào trong số các kim loại được cho ở bảng sau:

Kim loại	Điện trở suất ở $20^\circ C$ (Ωm)
Bạc	$1,62 \cdot 10^{-8}$
Đồng	$1,69 \cdot 10^{-8}$
Vàng	$2,44 \cdot 10^{-8}$
Nhôm	$2,75 \cdot 10^{-8}$
Sắt	$9,68 \cdot 10^{-8}$

Lời giải

a) Khi $S \rightarrow +\infty$ thì $R \rightarrow 0$, nghĩa là khi S càng lớn thì R càng bé

b) Toạ độ giao điểm của đồ thị hàm số với đường thẳng $R = 0,001$ cho biết khi $S = 0,000169m^2$ thì $R = 0,001$

$$\text{c) } \rho = \frac{RS}{\ell} = \frac{0,001 \cdot 0,000169}{10} = 1,69 \cdot 10^{-8} (\Omega m)$$

Vậy dây điện trở được làm bằng đồng

Câu 41. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người).

a) Tính số dân của thị trấn vào năm 2022 (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

b) Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $f(t)$.

c) Đạo hàm của hàm số $y = f(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm).

- Tính tốc độ tăng dân số vào năm 2022 của thị trấn đó.

- Vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0,192 nghìn người/năm?

Giải

a) Ta có: $f(52) = \frac{26 \cdot 52 + 10}{52 + 5} = \frac{1362}{57} \approx 23,895$ (nghìn người).

Vậy số dân của thị trấn vào năm 2022 khoảng 23895 người.

b) 1) Sự biến thiên

- Giới hạn tại vô cực và đường tiệm cận ngang:

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 26$. Do đó, đường thẳng $y = 26$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

- $f'(t) = \frac{120}{(t+5)^2} > 0$ với mọi $t \geq 0$.

- Bảng biến thiên:

t	0	$+\infty$
$f'(t)$		+
$f(t)$	2	26

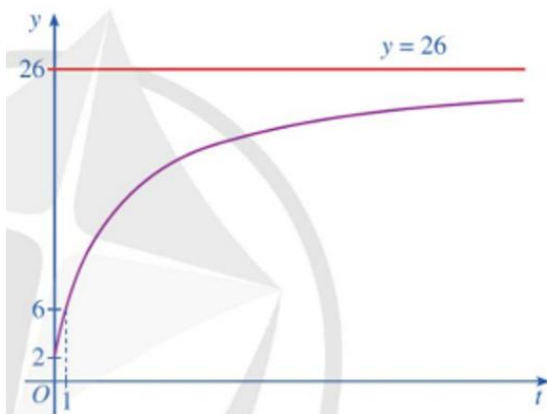
Hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

2) Đồ thị

- Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0; 2)$.

- Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; 6)$. Vậy đồ thị hàm số $y = f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$, $t \geq 0$ được cho ở Hình.



c) Tốc độ tăng dân số vào năm 2022 của thị trấn là: $f'(52) = \frac{120}{(52+5)^2} = \frac{40}{1083}$.

- Ta có: $f'(t) = 0,192 \Leftrightarrow \frac{120}{(t+5)^2} = 0,192 \Leftrightarrow (t+5)^2 = 625 \Leftrightarrow t = 20$ (do $t \geq 0$).

Vậy vào năm 1990, thì tốc độ tăng dân số là 0,192 nghìn người/năm.

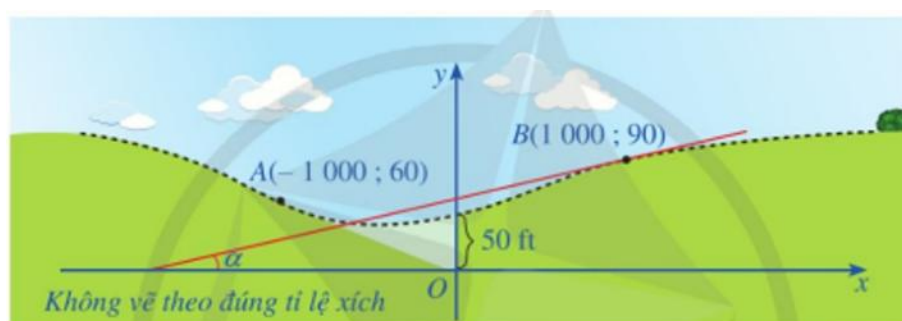
Để vận dụng đạo hàm và khảo sát hàm số vào giải quyết một số bài toán trong thực tiễn, trước hết ta cần xây dựng mô hình toán học cho bài toán, trong đó khâu then chốt là đưa ra một hàm số mô phỏng được mối liên hệ giữa các đối tượng, hiện tượng trong bài toán đó. Ở các ví dụ trên, những hàm số như vậy được cho sẵn. Trong các ví dụ dưới đây, ta sẽ tìm hiểu một vài cách xây dựng đơn giản cho những hàm số như thế.

Câu 42. (Bài toán thiết kế mô hình đường giao thông) Để thiết kế mô hình của một đoạn đường cao tốc nối hai sườn đồi với sự khác biệt về độ cao ở vị trí hai sườn đồi giao nhau là 50 feet (Hình 27), người ta có thể làm như sau:

- Chọn hệ trục tọa độ Oxy với gốc O là vị trí hai sườn đồi giao nhau, phương nằm ngang là trục Ox , đơn vị trên mỗi trục tọa độ là feet ($1 \text{ feet} = 0,3048 \text{ m}$).

- Chọn hai vị trí A, B lần lượt trên hai sườn đồi. Bằng cách đo đạc tại thực địa, ta xác định được tọa độ của hai điểm A, B và góc dốc α (đơn vị: độ) tại điểm B của sườn đồi. Giả sử ta có $A(-1000; 60), B(1000; 90)$ và $\tan \alpha = 0,04$ (Hình)

- Trong hệ trục tọa độ Oxy , quan sát đường cong (vẽ bằng nét đứt) mô phỏng đoạn đường cao tốc nối hai sườn đồi, đường cong đó gọi nên hình ảnh đồ thị của hàm số bậc ba. Vì thế ta có thể chọn hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) sao cho trong hệ trục tọa độ Oxy , đồ thị của hàm số đó trên đoạn $[-1000; 1000]$ mô phỏng đoạn đường cao tốc cần thiết kế. Ta chọn theo nguyên tắc: Hệ số góc của tiếp tuyến tại B của đồ thị hàm số đó bằng 0,04.



Hãy xác định hàm số bậc ba đó.

Giải

Do đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ đi qua điểm $(0; 50)$ nên $d = 50$, suy ra $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 50$. Do đồ thị đi qua các điểm $A(-1000; 60)$, $B(1000; 90)$ nên ta có:
$$\begin{cases} -1000000000a + 1000000b - 1000c = 10 \\ 1000000000a + 1000000b + 1000c = 40, \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} -1000000000a + 1000000b - 100c = 1 \\ 1000000000a + 1000000b + 100c = 4 \end{cases}$$

$$\text{suy ra } \begin{cases} b = \frac{1}{40000} \\ 1000000000a + 100c = 1,5. \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 3ax^2 + \frac{1}{20000}x + c.$$

Do hệ số góc của tiếp tuyến tại B của đồ thị hàm số đó bằng 0,04 nên

$$f'(1000) = 3000000a + \frac{1}{20} + c = 0,04, \text{ tức là } 3000000a + c = -0,01.$$

Ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 1000000000a + 100c = 1,5 \\ 3000000a + c = -0,01, \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} a = -\frac{1}{80000000} \\ c = \frac{11}{400}. \end{cases}$$

$$\text{Vậy hàm số bậc ba cần tìm là } f(x) = -\frac{1}{80000000}x^3 + \frac{1}{40000}x^2 + \frac{11}{400}x + 50.$$

Câu 43. (Bài toán thiết kế mô hình đánh giá kỹ năng) Một trung tâm dạy nghề cần thiết kế mô hình đánh giá kỹ năng của một học viên theo học nghề đánh máy. Người ta có thể làm như sau:

· Để xây dựng mô hình toán học cho bài toán trên, ta sử dụng thống kê. Bằng cách khảo sát tốc độ đánh máy trung bình S (tính bằng từ trên phút) của học viên đó sau t tuần học ($5 \leq t \leq 30$), ta thu thập các số liệu thống kê được cho trong Bảng

t	5	10	15	20	25	30
S	38	56	79	90	93	94

- Ta cần chọn hàm số $y = f(t)$ để biểu diễn các số liệu ở Bảng, tức là ở hệ trục tọa độ Oxy , đồ thị của hàm số đó trên khoảng $(0; +\infty)$ "gần" với các điểm $A(5; 38)$, $B(10; 56)$, $C(15; 79)$, $D(20; 90)$, $E(25; 93)$, $G(30; 94)$. Ngoài ra, do tốc độ đánh máy trung bình của học viên tăng theo thời gian t và chỉ đến một giới hạn M nào đó cho dù thời gian t có kéo dài đến vô cùng nên hàm số $y = f(t)$ phải thỏa mãn thêm hai điều kiện: Hàm số đó đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = M \in \mathbb{R}, M > 94$. Vì các hàm đa thức (với bậc lớn hơn hoặc bằng

1) không thỏa mãn hai điều kiện đó nên ta chọn một hàm phân thức hữu tỉ để biểu diễn các số liệu ở Bảng. Ta có thể chọn hàm số có dạng $f(t) = \frac{at+b}{ct+d} (ac \neq 0)$ cho mục đích đó. Dựa vào

$$\text{Bảng, ta chọn hàm số } f(t) = \frac{110t - 280}{t + 2} (t > 0).$$

a) Dựa theo mô hình đó, dự đoán tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sau 40 tuần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của từ/phút).

b) Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên khoảng $(0; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

c) Nêu nhận xét về tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sau thời gian t ngày càng lớn.

Giải

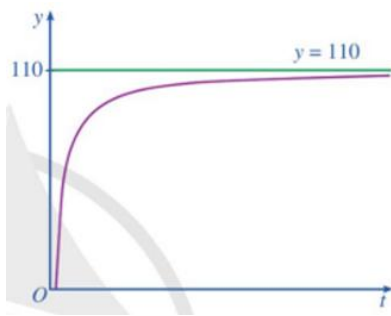
a) Ta có: $f(40) = \frac{110 \cdot 40 - 280}{40 + 2} \approx 98$. Vậy tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sau 40 tuần là khoảng 98 từ/phút.

b) Ta có: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{110t - 280}{t + 2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(110 - \frac{500}{t + 2} \right) = 110$.

Vậy đường thẳng $y = 110$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(t)$.

c) Do đường thẳng $y = 110$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(t)$ nên khi t càng lớn thì tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sẽ tiến gần đến mức 110 từ/phút.

Chú ý: Đồ thị hàm số $y = f(t) = \frac{110t - 280}{t + 2} (t > 0)$ được cho ở Hình.



Đồ thị đó giao với trục tung tại điểm có tọa độ là $(0; -140)$.

Câu 44. Một trang sách có dạng hình chữ nhật với diện tích là 384 cm^2 . Sau khi để lề trên và lề dưới đều là 3 cm , để lề trái và lề phải đều là 2 cm . Phần còn lại của trang sách được in chữ. Kích thước tối ưu của trang sách là bao nhiêu để phần in chữ trên trang sách có diện tích lớn nhất?

Lời giải

Giả sử chiều dài của trang sách là x và chiều rộng là y . Theo đề bài, diện tích của trang sách là:
 $xy = 384 \text{ cm}^2$

Khi để lề trên và lề dưới đều là 3 cm , lề trái và lề phải đều là 2 cm thì diện tích phần in chữ sẽ là: $(x - 2 \cdot 2)(y - 2 \cdot 3) = (x - 4)(y - 6)$

Ta có: $x = \frac{384}{y}$ (1)

Thay x vào phương trình $(x - 4)(y - 6)$ ta thu được $(\frac{384}{y} - 4)(y - 6)$

$$f(y) = \left(\frac{384}{y} - 4 \right) (y - 6)$$

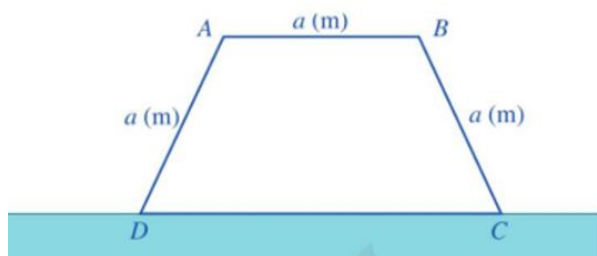
$$\rightarrow f'(y) = -4 + \left(\frac{2304}{y^2} \right)$$

$$f'(y) = 0 \rightarrow -4 + \left(\frac{2304}{y^2} \right) = 0 \rightarrow y = 24$$

Thế vào (1): $x = 24 \rightarrow y = 16$

Vậy kích thước của trang sách có chiều dài 24 cm , chiều rộng 16 cm thì phần in chữ trên trang sách có diện tích lớn nhất

Câu 45. Một bác nông dân có ba tấm lưới thép $B40$, mỗi tấm dài $a(\text{m})$ và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như Hình (bờ sông là đường thẳng CD không phải rào). Hỏi bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?



Lời giải

Giả sử chiều dài của hai cạnh đáy của hình thang cân lần lượt là x và $2x$, và chiều dài của cạnh bên là $a - 3x$. Do đó, chiều cao của hình thang cân là: $h = \sqrt{(a - 3x)^2 - x^2}$

$$\text{Diện tích của hình thang cân là: } S = \frac{(x + 2x)h}{2} = \frac{3x\sqrt{(a - 3x)^2 - x^2}}{2}$$

Để tìm giá trị lớn nhất của S , ta cần tìm giá trị x sao cho đạo hàm của S theo x bằng 0. Đạo hàm của S theo x được tính bằng công thức sau:

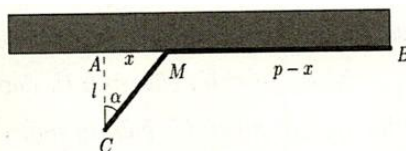
$$S' = \frac{dS}{dx} = \frac{3x(8x - 9)}{2\sqrt{-x^2 + (a - 3x)^2}} + \frac{3\sqrt{-x^2 + (a - 3x)^2}}{2}$$

Giải phương trình $S' = 0$

Sau khi giải, thay x vào công thức diện tích S , ta tìm được diện tích lớn nhất của mảnh vườn

$$\text{có thể rào được là } S_{\max} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Câu 46. Từ tổng kho ở địa điểm C cách bờ sông $l(\text{km})$, người ta cần vận chuyển hàng hóa đến trạm trung chuyển M ở bờ sông để rồi vận chuyển tiếp bằng đường thủy đến kho cảng B (hình vẽ). Hãy hoạch định tuyến đường bộ từ C đến M và tiếp đến là tuyến đường thủy đến B sao cho chi phí vận chuyển là thấp nhất, biết rằng chi phí vận chuyển một tấn hàng (trên cùng một đơn vị khoảng cách) theo đường bộ đắt gấp 4 lần chi phí theo đường thủy.



Bài giải

Đương nhiên nếu phí vận chuyển theo đường bộ bằng hoặc thấp hơn theo đường thủy thì người ta chỉ cần vạch tuyến đường bộ thẳng từ C đến B là xong.

Ta kí hiệu khoảng cách AM là x ; khoảng cách từ A đến B là p (cố định). Khi đó chi phí vận chuyển một tấn hàng từ C đến B là $k \cdot f(x)$ với k là hằng số nào đó cho trước và $f(x)$ được xác định bởi biểu thức

$$f(x) = 4\sqrt{x^2 + l^2} + (p - x), 0 \leq x < p.$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$. Ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{l\sqrt{15}}{15}.$$

Dễ dàng kiểm tra rằng $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 và đó là cực tiểu duy nhất. Lúc này, CM tạo với

$$CA \text{ một góc } \alpha \text{ mà } \tan \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

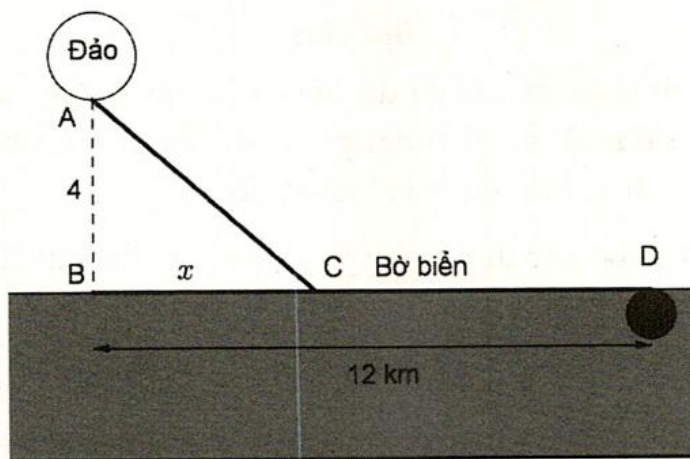
Để xét xem hiệu quả kinh tế, ta giả thiết giá vận chuyển một tấn hàng trên đơn vị đường đi theo đường thẳng là a (đồng), công bốc dỡ (tại M) và xếp lên tàu tại B là b đồng. Khi đó tuyến giao thông thủy bộ đó có lợi về kinh tế nếu $4aCM + aMB + b < 4aCB$.

Câu 47. Theo các nhà điều cầm học, khi bay ngang qua mặt nước, chim phải tiêu tốn nhiều năng lượng hơn so với khi bay ngang qua đất liền, và theo bản năng, chim luôn chọn đường bay tiêu tốn ít năng lượng nhất.

Một con chim cất cánh từ đảo A cách bờ biển 4 km . Hãy xem A như là một điểm, bờ biển là một đường thẳng; và gọi B là hình chiếu vuông góc của A lên bờ biển. Quan sát cho thấy: trước tiên chim bay đến một điểm C trên bờ biển, sau đó mới bay dọc theo bờ biển đến tổ D của nó. Giả sử B và D cách nhau 12 km .

Đặt $r = W/L$;

trong đó W và L lần lượt là năng lượng tiêu tốn mỗi kilômét bay khi chim bay ngang qua mặt nước và khi chim bay ngang qua đất liền.



Xác định vị trí của C nếu $r = \sqrt{2}$.

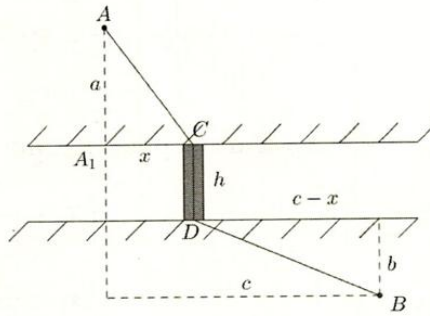
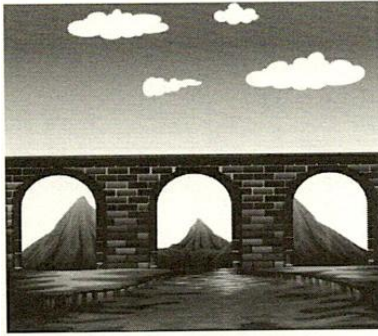
Lời giải

Ta đặt $BC = x(\text{km})$ với $x \in [0; 12]$. Khi đó năng lượng tiêu tốn suốt hành trình bay của chim (theo quan sát) là $\sqrt{16 + x^2} \cdot W + (12 - x)L = Lf(x)$, $f(x) = r\sqrt{16 + x^2} + 12 - x$.

$$\text{Đạo hàm } f'(x) = \frac{rx}{\sqrt{16 + x^2}} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{\sqrt{r^2 - 1}} = 4 \text{ (vì } r = \sqrt{2} \text{)}.$$

Hàm số f nghịch biến trên $[0;4]$ và đồng biến trên $[4;12]$ nên hàm số f nhỏ nhất tại $x = 4$, tức là $BC = 4(km)$.

Câu 48. Hãy chọn địa điểm để xây dựng một cây cầu vượt sông sao cho chiều dài đoạn đường nối hai địa điểm cho trước ở hữu ngân và tả ngân sông là lớn nhất (hình vẽ).



Lời giải

Giả sử hình vẽ trên là sơ đồ địa điểm xây dựng cầu và vùng gần các địa điểm A và B ở hai phía của sông. Theo bài ra, ta có các khoảng cách a, b, c và h là không đổi.

Nếu cầu được xây dựng như vậy thì chiều dài của đoạn đường nối các địa điểm A và B sẽ bằng $l = l(A, B) = AC + h + DB$.

Ta đặt biến $x = A_1C$ là khoảng cách giữa A_1 và $C, x \in [0; c]$.

Ta có

$$AC = \sqrt{a^2 + x^2}, DB = \sqrt{b^2 + (c-x)^2} \text{ và do đó } l(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + h + \sqrt{b^2 + (c-x)^2}, x \in [0; c].$$

Như vậy, bài toán đã cho quy về tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $l(x)$ trên đoạn $[0; c]$. Ta có

$$\begin{aligned} l'(x) &= \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{x-c}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} \\ &= \frac{x\sqrt{b^2 + (c-x)^2} + (x-c)\sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 + (c-x)^2)}}. \end{aligned}$$

$$\text{Đạo hàm } l'(x) = 0 \text{ khi } x\sqrt{b^2 + (c-x)^2} + (x-c)\sqrt{a^2 + x^2} = 0.$$

Giải phương trình này, ta được

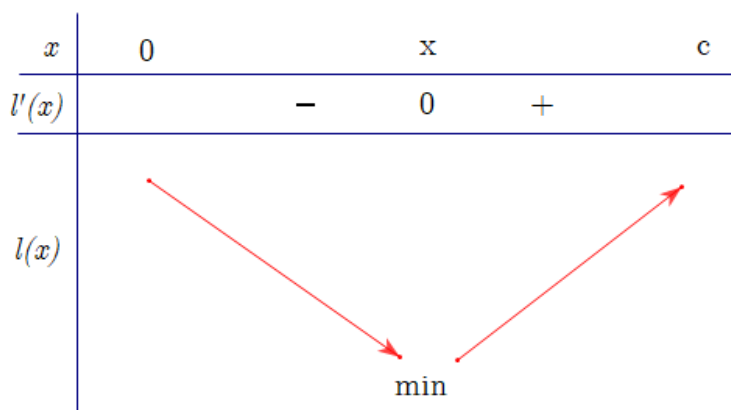
$$\begin{aligned} x^2 [b^2 + (c-x)^2] &= (x-c)^2 (a^2 + x^2) \\ b^2 x^2 &= a^2 (x-x)^2. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình là } \begin{cases} x_1 = \frac{ac}{a-b} \\ x_2 = \frac{ac}{a+b}. \end{cases}$$

Nghiệm x_1 nằm ngoài đoạn $[0; c]$. Thật vậy, nếu $a > b$ thì $\frac{a}{a-b} > 1$ nên hệ thức $x_1 = \frac{ac}{a-b}$ chứng tỏ rằng $x_1 > c$. Nếu $a < b$ thì $x_1 < 0$ cũng nằm ngoài đoạn $[0; c]$. Điểm $x_2 = \frac{ac}{a+b}$ nằm trong khoảng $(0; c)$ với mọi giá trị dương a, b, c vì lúc đó $x_2 > 0$ và $\frac{a}{a+b} < 1 \Rightarrow x_2 = \frac{ac}{a+b} < c$.

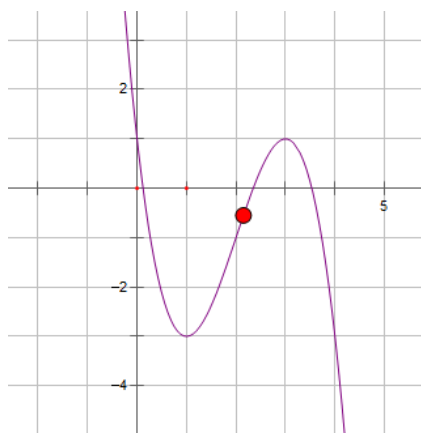
Mặt khác, đạo hàm $l'(x)$ tồn tại khắp nơi nên ngoài $x_2 = \frac{ac}{a+b}$ thì hàm số không còn điểm tới hạn nào khác.

Lập bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số $l(x)$ đạt cực tiểu duy nhất tại điểm x . Giá trị cực tiểu đó cũng chính là giá trị nhỏ nhất đối với chiều dài $l(x)$ trên đoạn $[0; c]$. Điều đó có nghĩa là cầu cần xây dựng tại địa điểm mà $A_1C = \frac{ac}{a+b}$.

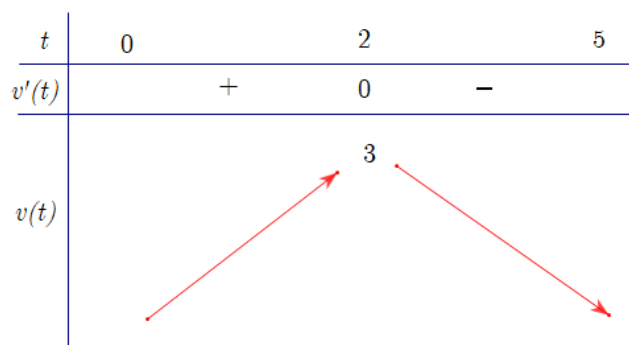
Câu 49. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = 6t^2 - t^3 - 9t + 1$, s tính theo mét, t tính theo giây. Trong 5 giây đầu tiên, thời điểm t mà tại đó vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất sẽ là bao nhiêu?



Lời giải

Ta có vận tốc là $v(t) = s'(t) = 12t - 3t^2 - 9$, $v'(t) = -6t + 12$, $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

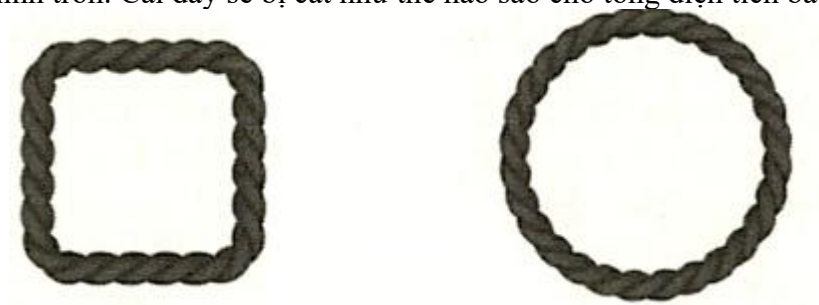
Lập bảng biến thiên, ta có



Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\max_{t \in (0;5)} v(t) = v(2) = 3$.

Vậy trong 3 giây, vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

Câu 50. Một cái dây dài L được cắt thành hai đoạn. Một đoạn bị nối thành dạng hình vuông và đoạn kia là thành hình tròn. Cái dây sẽ bị cắt như thế nào sao cho tổng diện tích bao gồm bởi hai đoạn dây này là

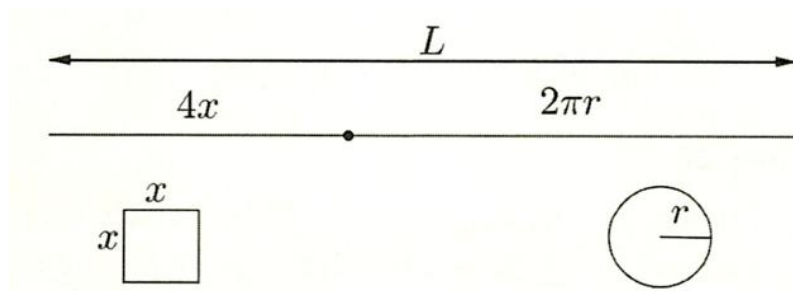


a) Cực đại;

b) Cực tiểu.

Lời giải

Giả sử x là cạnh của hình vuông và r là bán kính của hình tròn như hình vẽ



Tổng diện tích là $A = x^2 + \pi r^2$, trong đó x và r liên hệ bởi phương trình $4x + 2\pi r = L$.

Từ hai phương trình này, ta có $A = x^2 + \pi \frac{1}{4\pi^2} (L - 4x)^2 = x^2 + \frac{1}{4\pi} (L - 4x)^2$.

Đạo hàm $A' = 2x + \frac{1}{4\pi} 2(L - 4x)(-4) = 2x - \frac{2}{\pi} (L - 4x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\pi} (L - 4x) \Leftrightarrow x = \frac{L}{4 + \pi}$.

Đạo hàm cấp hai $A''(x) = 2 + \frac{8}{\pi} > 0$ nên ta có kết luận sau:

a) Để làm cực đại A , chúng ta phải lựa chọn $x = 0$ và sử dụng tất cả cái dây làm đường tròn. Nếu chúng ta cứ nhất định cắt cái dây thì a) không có câu trả lời vì khi đó chúng ta luôn có thể tăng tổng diện tích bằng cách dùng đoạn dây còn lại.

b) Tổng diện tích đạt cực tiểu khi $x = \frac{L}{4 + \pi}$. Vậy chiều dài của đoạn dây đã dùng làm hình vuông

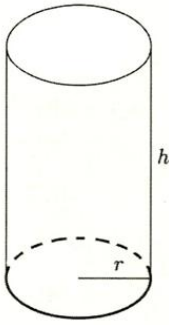
sẽ là $4x = \frac{4L}{4 + \pi}$ và chiều dài đoạn dây làm hình tròn sẽ là

$$L - 4x = L - \frac{4L}{4 + \pi} = \frac{\pi L}{4 + \pi}.$$

Chú ý rằng, diện tích đạt cực tiểu khi mà đường kính của đường tròn bằng cạnh của hình vuông,

$$\text{vì } 2\pi = \frac{1}{\pi}(L - 4x) = \frac{1}{\pi}\left(L - \frac{4L}{4 + \pi}\right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi L}{4 + \pi} = \frac{L}{4 + \pi}.$$

Câu 51. Một nhà máy sản xuất các hộp đựng xà phòng hình trụ nhận a đơn đặt hàng đối với các hộp có thể tích được chỉ rõ là V_0 . Diện tích toàn bộ bề mặt của một cái hộp sẽ đạt cực tiểu khi nào? Và số lượng kim loại cần cho nhà máy là bao nhiêu?



Lời giải

Giả sử r là bán kính của đáy và h là chiều cao của hình trụ. Thể tích là: $V_0 = \pi r^2 h$

Diện tích bề mặt toàn phần là: $A = 2\pi r^2 + \pi r h$.

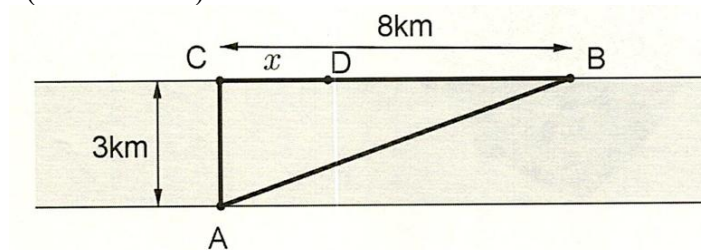
Từ hai phương trình này ta rút ra $A = 2\pi r^2 + \pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V_0}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V_0}{r}$.

Đạo hàm $A' = 4\pi r - \frac{2V_0}{r^2} = 0 \Rightarrow 2\pi r^3 = V_0$.

Giải phương trình này ta được $r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}} \Rightarrow h = 2\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$

Vậy khi $h = 2r$ hay chiều cao của hình trụ bằng bán kính đáy thì thể tích hình trụ là lớn nhất.

Câu 52. Một người đàn ông muốn hạ thủy chiếc thuyền của mình từ điểm A trên bờ một con sông rộng 3 km và muốn cập bến sang điểm B của bờ đối diện, cách 8 km theo hướng xuôi dòng với thời gian nhanh nhất có thể (xem hình vẽ)



Ông có thể chèo trực tiếp sang điểm C bờ đối diện rồi sau đó chạy xuống điểm B , hoặc ông có thể chèo thẳng sang điểm B , hoặc chèo đến điểm D giữa C và B rồi sau đó chạy xuống điểm B . Nếu ông có thể chèo qua sông với vận tốc là 6 km/h và chèo xuôi dòng với vận tốc 8 km/h

, thì ông nên dùng chân ở điểm nào để đến B nhanh nhất? (Giả sử vận tốc của dòng nước không ảnh hưởng bao nhiêu đến vận tốc chèo thuyền của người đàn ông).

Lời giải

Gọi x là khoảng cách từ C đến D thì khoảng cách mà người đàn ông phải chạy là $DB = 8 - x$ và theo định lý Pythagore, ta có được khoảng cách đường chéo: $AD = \sqrt{x^2 + 9}$

Ta áp dụng công thức Thời gian = $\frac{\text{Khoảng cách}}{\text{vận tốc}}$

Thời gian chèo thuyền bằng $\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6}$ và thời gian chạy bằng $\frac{8-x}{8}$. Như vậy tổng thời gian T

được viết dưới dạng hàm số theo x : $T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8-x}{8}$.

Miền xác định của hàm số T là $[0; 8]$. Chú ý rằng nếu $x = 0$, thì ông chèo tới C , và nếu $x = 8$ thì ông chèo thẳng tới B . Đạo hàm của T là $T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{8}$

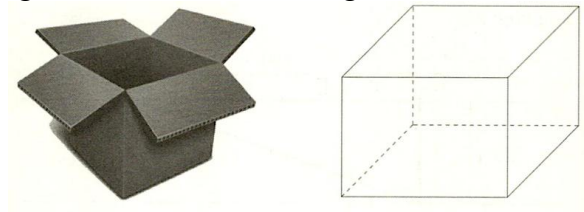
Sử dụng điều kiện $x \geq 0$, ta có

$$\begin{aligned} T'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{1}{8} \\ &\Leftrightarrow 4x = 3\sqrt{x^2 + 9} \\ &\Leftrightarrow 16x^2 = 9(x^2 + 9) \\ &\Leftrightarrow 7x^2 = 81 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}}. \end{aligned}$$

Ta tìm giá trị của T tại ba điểm $1,5$; $1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1,33$ và $\frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1,42$

Vậy người đàn ông nên cho thuyền chèo đến bờ đối diện cách điểm xuất phát là $\frac{9}{\sqrt{7}} \approx 3,4(km)$ theo hướng xuôi dòng.

Câu 53. Từ một tấm bìa carton hình chữ nhật có kích thước là $a \times b$ với $a < b$. Người ta cắt bỏ 4 hình vuông bằng nhau ở 4 góc rồi gò thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Hỏi cạnh của hình vuông cắt đi phải bằng bao nhiêu để hình hộp đó có thể tích lớn nhất?



Lời giải

Gọi x là cạnh của hình vuông cắt đi, ta phải có điều kiện $0 < x < \frac{a}{2}$.

Khi đó thể tích hình hộp là $V(x) = x(a - 2x)(b - 2x) = 4x^3 - 2(a + b)x^2 + abx$.

Bài toán trở thành bài toán tìm $\max_{x \in \left(0; \frac{a}{2}\right)} V(x)$.

Ta có $V'(x) = 12x^2 - 4(a+b)x + ab$

Ta có $\Delta' = 4(a+b)^2 - 12ab = 4(a^2 - ab + b^2) > 0, \forall a, b$.

Do đó $V' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt. Nghiệm là

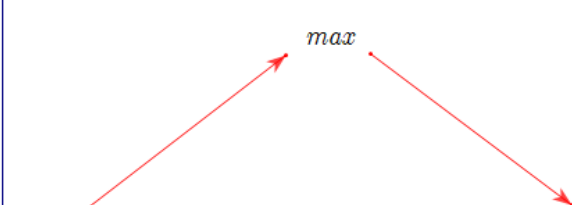
$$x_1 = \frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6} < x_2 = \frac{a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}.$$

Áp dụng định lí Viète, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{a+b}{3} > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{ab}{2} > 0 \end{cases}$ suy ra $0 < x_1 < x_2$.

Hơn nữa, ta có $V'\left(\frac{a}{2}\right) = f'\left(\frac{a}{2}\right) = a^2 - ab = a(a-b) < 0$

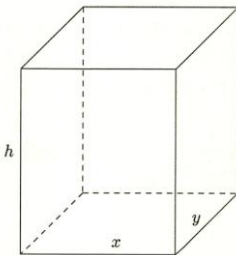
Do đó $0 < x_1 < \frac{a}{2} < x_2$

Bảng biến thiên

x	0	x_1	$\frac{a}{2}$
$V'(x)$	+	0	-
$V(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy V đạt giá trị lớn nhất khi $x = x_1 = \frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$.

Câu 54. Cần phải xây dựng một hố ga, dạng hình hộp chữ nhật có thể tích $V(m^3)$ không đổi, hệ số $k > 0$ cho trước (k là tỉ số giữa chiều cao của hố và chiều rộng của đáy. Hãy xác định các kích thước của đáy để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất.



Lời giải

Gọi $x, y (0 < x < y)$ lần lượt là chiều rộng và chiều dài của đáy hố ga. Gọi h là chiều cao của hố ga ($h > 0$).

Theo bài ra, ta có $h = kx$ và $V = hxy \Rightarrow y = \frac{V}{hx} = \frac{V}{kx^2}$.

Để tiết kiệm nguyên vật liệu nhất, ta cần tìm các kích thước sao cho diện tích toàn phần của hộp là nhỏ nhất.

Khi đó, ta có $S_{tp} = 2xh + 2yh + 2xy = 2x(kx) + 2(kx) \cdot \frac{V}{kx^2} + 2x \frac{V}{kx^2}$.

Hay ta có $S_{tp} = 2kx^2 + \frac{2\left(\frac{k+1}{k}\right)V}{x}$.

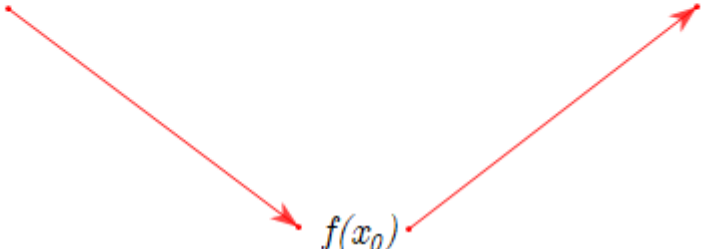
Xét hàm số $f(x) = 2kx^2 + \frac{2\left(\frac{k+1}{k}\right)V}{x}$.

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ với $x > 0$.

Ta có $f'(x) = 4kx - \frac{2\left(\frac{k+1}{k}\right)V}{x^2} = 2 \frac{2k^2x^3 - (k+1)V}{kx^2}$.

Ta rút ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \sqrt[3]{\frac{(k+1)V}{2k^2}} > 0$.

Lập bảng biến thiên, ta có

x	0	x_0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$				

Dựa vào bảng biến thiên, ta rút ra $\min_{x>0} f(x) = f\left(\sqrt[3]{\frac{(k+1)V}{2k^2}}\right)$.

Khi đó $y = \sqrt[3]{\frac{4kV}{(k+1)^2}}$ và $h = \sqrt[3]{\frac{k(k+1)V}{2}}$.

Câu 55. Kính viễn vọng Hubble được tàu không gian Discovery đưa vào sử dụng ngày 24/4/1990. Phương trình biểu diễn vận tốc của tàu không gian này từ lúc rời bệ phóng $t = 0$ cho đến khi tên lửa vào thời gian $t = 126$ giây được cho bởi

$$v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083 \text{ (feet / s)}.$$

Hãy sử dụng phương trình này để tính các giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của gia tốc tàu giữa lúc cất cánh và lúc hoàn toàn được phóng đi.

Lời giải

Bài toán yêu cầu chúng ta đi tìm cực trị của hàm số gia tốc, chứ không phải là cực trị của hàm vận tốc. Ta có $a(t) = v'(t) = 0,003906t^2 - 0,18058t + 23,61$.

Đạo hàm $a'(t) = 0,007812t - 0,18058 = 0 \Leftrightarrow t \approx 23,12$.

Tính giá trị tại các điểm 0; 23,12 và 126, ta được

$a(0) = 23,61$; $a(23,12) = 21,52$ và $a(126) = 62,87$.

Vậy gia tốc cực đại của tàu là $62,87 \text{ ft/s}^2$ và gia tốc cực tiểu của tàu là $21,52 \text{ ft/s}^2$.

Câu 56. Enzyme là protein hoạt động như một chất xúc tác làm tăng tốc độ phản ứng hóa học xuất hiện trong các tế bào. Trong một phản ứng nào đó, một enzyme được chuyển hóa thành một enzyme khác, được gọi là enzyme sản phẩm. Enzyme sản phẩm này hoạt động như một chất xúc tác cho chính sự hình thành của nó. Tốc độ R mà tại đó enzyme sản phẩm được tạo thành được cho bởi phương trình $R = kp(l - p^2)$, trong đó l là tổng số lượng enzyme ban đầu và enzyme sản phẩm, p là lượng enzyme sản phẩm, và k là hằng số dương. Với giá trị nào của p thì R đạt giá trị lớn nhất?

Lời giải

Ta có $R = k(pl - p^2)$

Đạo hàm $R'(p) = 0 \Leftrightarrow k(l - 2p) = 0 \Leftrightarrow p = \frac{l}{2}$

Ta có $R''(p) = -2k < 0$, nên hàm số đạt cực đại tại $p = \frac{l}{2}$. Đây cũng chính là giá trị lớn nhất của hàm số.

Câu 57. Hàm chi phí của một nhà máy được cho bởi $C = C(Q) = \frac{Q^2}{4} + 3Q + 400$ trong đó C là tổng chi phí sản xuất Q đơn vị sản phẩm. Với mức sản lượng là bao nhiêu thì chi phí trung bình tính trên mỗi đơn vị sản phẩm là thấp nhất? Khi đó chi phí trung bình tối thiểu bằng bao nhiêu?

Bài giải

Hàm chi phí trung bình

$$\bar{C} = \bar{C}(Q) = \frac{C}{Q} = \frac{\frac{Q^2}{4} + 3Q + 400}{Q} = \frac{Q}{4} + 3 + \frac{400}{Q} \text{ (với } Q > 0).$$

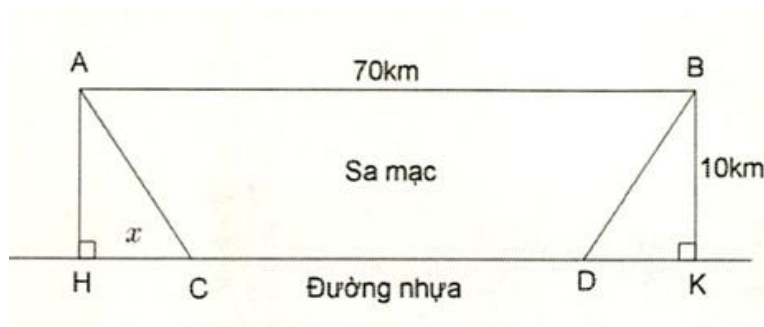
$$\text{Ta có } \bar{C}'(Q) = \frac{1}{4} - \frac{400}{Q^2} = \frac{Q^2 - 1600}{4Q^2} = 0 \Leftrightarrow Q = 40$$

Vì $\bar{C}''(Q) = \frac{800}{Q^3} > 0$, nên hàm số $\bar{C}$ đạt cực tiểu tại $Q = 40$.

$$\text{Chi phí trung bình tối thiểu là } \bar{C}(40) = \frac{40}{4} + 3 + \frac{400}{40} = 23$$

Câu 58. Một nhà địa chất học đang ở tại điểm A trên sa mạc. Anh ta muốn đến điểm B cách A một đoạn là 70 km. Trong sa mạc thì xe anh ta chỉ có thể di chuyển với vận tốc là 30 km/h. Nhà địa chất ấy phải đến được điểm B sau 2 giờ. Vì vậy, nếu anh ta đi thẳng từ A đến B sẽ không thể đúng giờ. May mắn thay, có một con đường nhựa song song với

đường nối A và B và cách AB một đoạn 10 km . Trên đường nhựa này, thì xe của nhà địa chất học có thể di chuyển với vận tốc 50 km/h . Làm thế nào để nhà địa chất học đến sớm nhất (đảm bảo trong khung giờ cho phép)?



Lời giải

Gọi H, K, C, D là các điểm như trong hình vẽ.

Gọi $HC = x (0 < x < 70)$ và $DK = y (0 < y < 70)$.

Quãng đường đi từ A đến C là $AC = \sqrt{10^2 + x^2} \Rightarrow t_1 = \frac{AC}{v_{\text{Sahara}}} = \frac{\sqrt{10^2 + x^2}}{30}$.

Quãng đường đi từ D đến B là $DB = \sqrt{10^2 + y^2} \Rightarrow t_2 = \frac{DB}{v_{\text{Sahara}}} = \frac{\sqrt{10^2 + y^2}}{30}$.

Quãng đường đi từ C đến D là $t_3 = \frac{CD}{v_{\text{đường nhựa}}} = \frac{70 - (x + y)}{50}$.

Tổng thời gian mà nhà địa chất học đi từ A đến B là $T = t_1 + t_2 + t_3$

Suy ra $T(x; y) = \frac{\sqrt{10^2 + x^2}}{30} + \frac{\sqrt{10^2 + y^2}}{30} + \frac{70 - (x + y)}{50}$.

Đây là một biểu thức có dạng đối xứng 2 biến x, y và ta cần tìm $\min T(x; y)$

Ta có $T(x; y) = \frac{\sqrt{10^2 + x^2}}{30} + \frac{\sqrt{10^2 + y^2}}{30} + \frac{70 - (x + y)}{50}$.

Hay, ta có

$$\begin{aligned} T(x; y) &= \frac{\sqrt{10^2 + x^2}}{30} + \frac{35 - x}{50} + \frac{\sqrt{10^2 + y^2}}{30} + \frac{35 - y}{50} \\ &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(u) = \frac{\sqrt{10^2 + u^2}}{30} + \frac{35 - u}{50}, 0 < u < 70$.

Đạo hàm

$$\begin{aligned} f'(u) &= \frac{u}{30\sqrt{10^2 + u^2}} - \frac{1}{50} = 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{10^2 + u^2} &= \frac{5u}{3} > 0 \Leftrightarrow u = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Lập bảng biến thiên, ta có $\min_{x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)} f(u) = f\left(\frac{15}{2}\right) = \frac{29}{30}$.

Do đó, ta có $T(x; y) = f(x) + f(y) \geq \frac{29}{30} + \frac{29}{30} = \frac{29}{15} \approx 1,93$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{15}{2} (km)$.