

BÀI TẬP RÈN LUYỆN CHƯƠNG 7

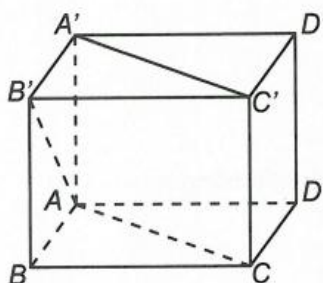
QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

I. BÀI TẬP TỰ LUẬN:

Câu 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa 2 đường thẳng

- AB và $B'C'$
- AC và $B'C'$
- $A'C'$ và $B'C$

Lời giải



a) Ta có $AB \parallel A'B'$ mà $(A'B', B'C') = 90^\circ$ nên $(AB, B'C') = 90^\circ$

b) Vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $(AC, BC) = 45^\circ$.

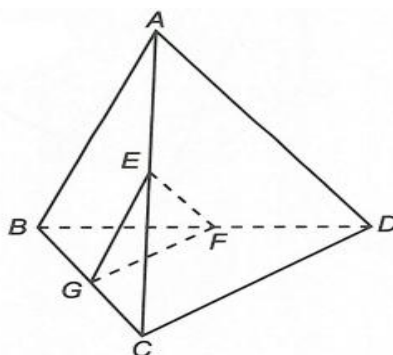
Ta có $BC \parallel B'C'$ nên $(AC, B'C') = 45^\circ$

c) Ta có $AC \parallel A'C'$ và $\triangle ACB'$ là tam giác đều vì có các cạnh đều bằng đường chéo của các hình vuông bằng nhau. Do đó $(A'C', B'C) = (AC, B'C) = 60^\circ$.

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$ có $CD = \frac{4}{3}AB$. Gọi G, E, F lần lượt là trung điểm của BC, AC, DB , biết

$EF = \frac{5}{6}AB$. Tính góc giữa CD và AB .

Lời giải



Gọi G là trung điểm của BC .

Đặt $AB = a$. Ta có $GE = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

$GF = \frac{CD}{2} = \frac{2}{3}AB = \frac{2a}{3}$; $EF = \frac{5}{6}AB = \frac{5a}{6}$.

$$\text{Từ đó } GE^2 + GF^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{9} = \frac{25a^2}{36} = EF^2$$

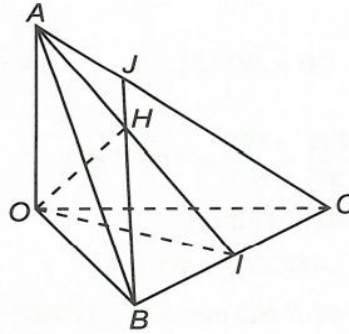
$\Rightarrow \triangle GEF$ vuông tại G .

Vì $GE \parallel AB, GF \parallel CD$ nên $(AB, CD) = (GE, GF) = EGF = 90^\circ$.

Câu 3. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (ABC) . Chứng minh

- $BC \perp (OAH)$.
- H là trực tâm của $\triangle ABC$.

Lời giải



a) Ta có $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$.

Mà $\begin{cases} OH \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{cases}$ nên $OH \perp BC$.

Vậy $BC \perp (OAH)$.

b) Do $OH \perp (ABC)$ nên $OH \perp AC$ (1).

Ta có $\begin{cases} OB \perp OA \\ OB \perp OC \end{cases}$ nên $OB \perp (OAC) \Rightarrow OB \perp AC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AC \perp (OBH) \Rightarrow AC \perp BH$.

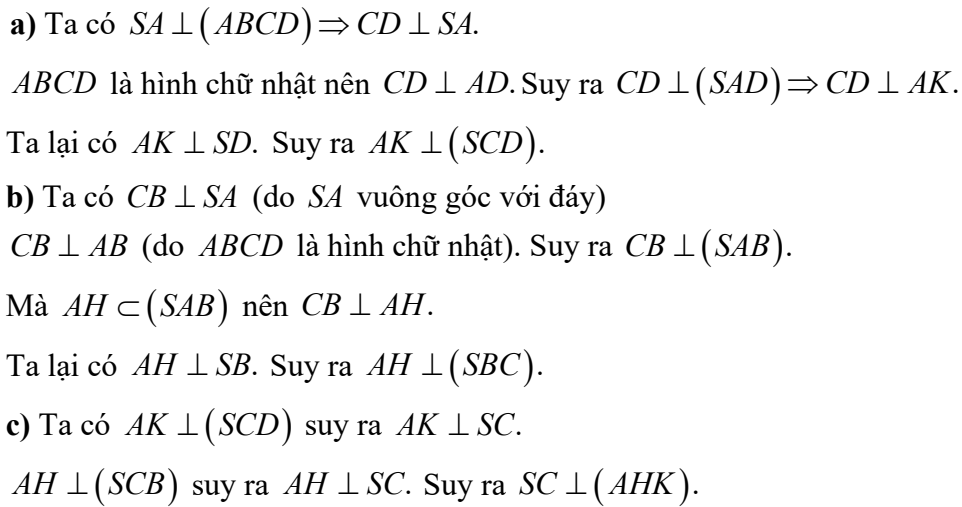
Mặt khác $BC \perp (OAH) \Rightarrow AH \perp BC$.

Vậy H là trực tâm của tam giác ABC .

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD .

- Chứng minh $AK \perp (SCD)$.
- Chứng minh $AH \perp (SBC)$.
- Chứng minh $SC \perp (AHK)$.

Lời giải



a) Chứng minh $AC' \perp (A'BD)$. b) Chứng minh $AC' \perp (CB'D')$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ACC'A') \Rightarrow BD \perp AC' (1).$

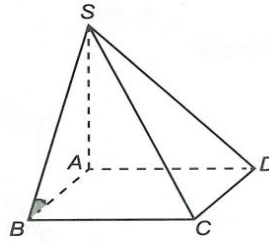
$$\begin{cases} BA' \perp AB' \\ BA' \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow BA' \perp (AB'C'D) \Rightarrow BA' \perp AC' (2).$$

b) Ta có $\begin{cases} BD // B'D' \\ A'B // CD' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD // (CB'D') \\ A'B // (CB'D') \end{cases} \Rightarrow (A'BD) // (CB'D').$

Page 3

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc mặt đáy và $SA = a$. Gọi φ là góc tạo bởi SB và mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định $\cot \varphi$?

Lời giải



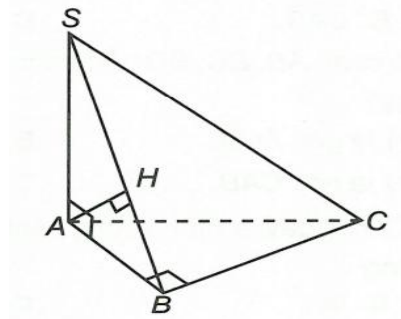
Ta có $SB \cap (ABCD) = \{B\}$.

Trên SB chọn điểm H . Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên A là hình chiếu của S lên $(ABCD)$.

Suy ra $(SB, (ABCD)) = (SB, BA) = SBA$. Vậy $\cot \varphi = \frac{AB}{SA} = \frac{2a}{a} = 2$.

Câu 7. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B , $AC = 2a$, $BC = a$, $SB = 2a\sqrt{3}$. Góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng

Lời giải



Kẻ $AH \perp SB (H \in SB)$ (1).

Theo giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SBC)$.

Do đó góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng góc giữa SA và SH bằng ASH .

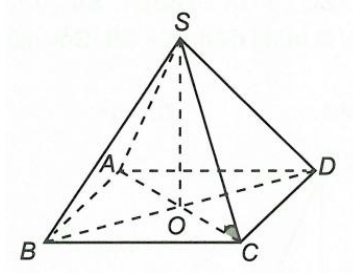
Ta có $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a\sqrt{3}$. Trong $\triangle SAB$ ta có $\sin ASB = \frac{AB}{SB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$.

Vậy $ASB = ASH = 30^\circ$.

Do đó góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng 30° .

Câu 8. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O có $BD = 4a$, $AC = 2a$. Lấy điểm S không thuộc $(ABCD)$ sao cho $SO \perp (ABCD)$. Biết $\tan SBO = \frac{1}{2}$. Số đo góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng

Lời giải



Góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc SCO .

$$BD = 4a \Rightarrow BO = 2a;$$

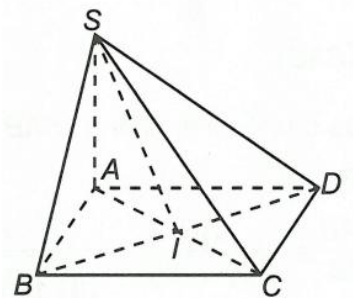
$$SO = BO \cdot \tan SBO = 2a \cdot \frac{1}{2} = a;$$

$$AC = 2a \Rightarrow OC = a.$$

Vậy $SCO = 45^\circ$.

Câu 9. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và (SAC) là

Lời giải



Gọi I là tâm của hình vuông của $ABCD$.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BD \perp AC$.

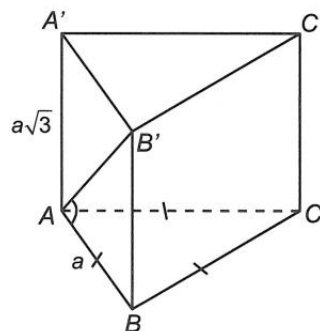
Mặt khác vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BD$.

Suy ra $BD \perp (SAC)$ do đó góc giữa đường thẳng SB và (SAC) là góc BSI .

$$\text{Ta có } SB = a\sqrt{2}; BI = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin BSI = \frac{BI}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow BSI = 30^\circ.$$

Câu 10. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $\triangle ABC$ đều cạnh a , $AA' = \sqrt{3}a$. Góc giữa đường thẳng AB' và (ABC) bằng

Lời giải



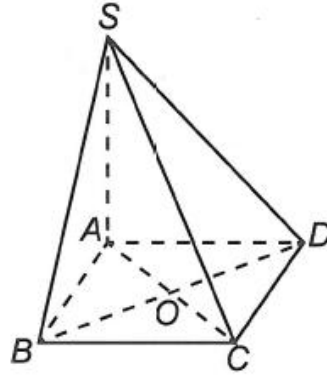
$AB\mathbf{C}.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên AB là hình chiếu vuông góc của AB' trên (ABC) .

Suy ra góc giữa đường thẳng AB' và (ABC) bằng $B'AB$.

$$\Delta B'AB \text{ vuông tại } B \text{ nên } \tan B'AB = \frac{BB'}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow B'AB = 60^\circ.$$

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA = a$, các cạnh còn lại bằng b . Chứng minh $(SAC) \perp (ABCD)$ và $(SAC) \perp (SBD)$.

Lời giải



Gọi $\{O\} = AC \cap BD$. Vì $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng b nên $ABCD$ là một hình thoi. Suy ra $AC \perp BD$ nên O là trung điểm của BD .

Mặt khác $SB = SD$ nên ΔSBD cân tại S .

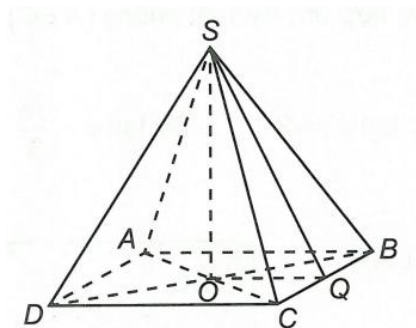
Do đó $SO \perp BD$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$$

Suy ra $(SAC) \perp (ABCD)$ và $(SAC) \perp (SBD)$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng

Lời giải



Gọi Q là trung điểm BC , suy ra $OQ \perp BC$.

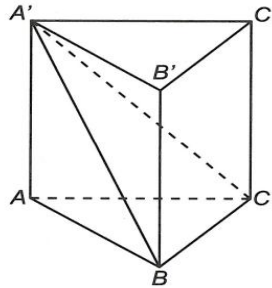
$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp OQ \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow ((SBC), (ABCD)) = (SQ, OQ) = SQQ.$$

Tam giác vuông SOQ có $\tan SQQ = \frac{SO}{OQ} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow SQQ = 60^\circ$.

Vậy mặt phẳng (SBC) hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 60° .

Câu 13. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $BA = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi φ là góc hợp bởi hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) . Khi đó, tính $\tan \varphi$.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'B'B) \Rightarrow BC \perp A'B$.

Do $\begin{cases} (A'BC) \cap (ABC) = BC \\ A'B \subset (A'BC); A'B \perp BC \\ AB \subset (ABC); AB \perp BC \end{cases}$

nên $A'BA = \varphi$ là góc hợp bởi hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) . Xét $\triangle A'BC$ vuông tại A ta có

$$\tan \varphi = \frac{A'A}{BA} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}.$$

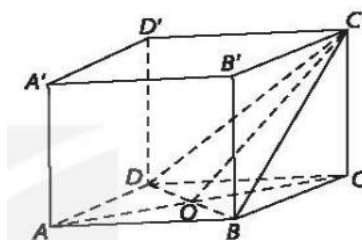
Câu 14. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a .

a) Tính độ dài đường chéo của hình lập phương.

b) Chứng minh rằng $(ACC'A') \perp (BDD'B')$.

c) Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Chứng minh rằng COC' là một góc phẳng của góc nhị diện $[C, BD, C']$. Tính (gần đúng) số đo của các góc nhị diện $[C, BD, C']$, $[A, BD, C']$.

Lời giải

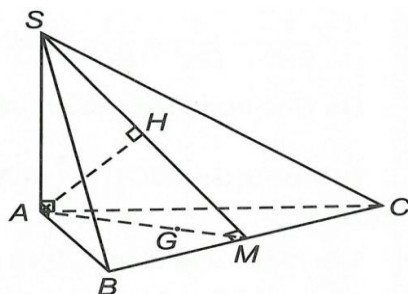


Hình 7.12

- a) Ta có $AC = a\sqrt{2}, CC' = a$. Do đó $AC' = \sqrt{CC'^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$.
- b) $AC \perp BD, AC \perp BB' \Rightarrow AC \perp (BDD'B') \Rightarrow (ACC'A') \perp (BDD'B')$.
- c) $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}, CC' = a \Rightarrow \tan COC' = \sqrt{2} \Rightarrow COC' \approx 55^\circ$ và góc nhị diện $[A, BD, C']$ bằng $180^\circ - COC' \approx 125^\circ$

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , ΔABC là tam giác đều cạnh bằng a , $SA = 2a$. Gọi G là trọng tâm ΔABC . Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) bằng

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC , H là hình chiếu vuông góc của A trên SM .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow (SBC) \perp (SAM).$$

$$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A; (SBC)) = AH.$$

Xét ΔSAM vuông tại A có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{57}}{6}.$$

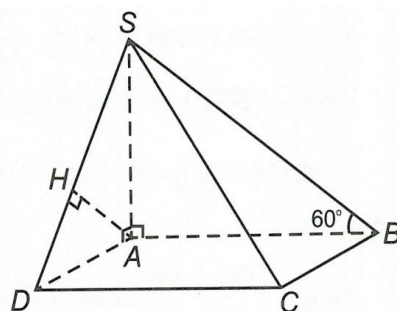
$$\text{Do } G \text{ là trọng tâm } \Delta ABC \text{ nên } \frac{GM}{MA} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Suy ra } d(G; (SBC)) = \frac{1}{3} d(A; (SBC)) = \frac{\sqrt{57}a}{18}.$$

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $ABCD$ là hình vuông cạnh

a. Biết góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

Lời giải



Do $SA \perp (ABCD)$ nên AB là hình chiếu vuông góc của SB trên mặt phẳng

$$(ABCD) \Rightarrow (SB; (ABCD)) = SBA.$$

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (SBC).$

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A: $SA = AB \tan SBA = a\sqrt{3}.$

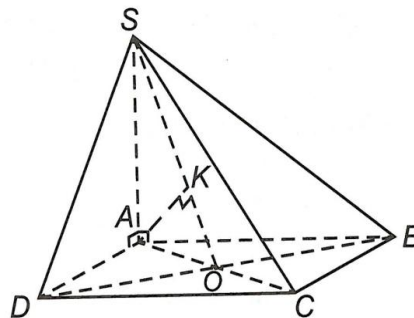
Dựng $AH \perp SD \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A; (SCD)) = AH.$

Xét $\triangle SAD$ vuông tại A: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$

Do $AB \parallel CD$ nên $d(B; (SCD)) = d(A; (SCD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD).$

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD \Rightarrow \begin{cases} BD \perp OA \\ BD \perp SA \end{cases}$

$$\Rightarrow BD \perp (SAO) \Rightarrow (SBD) \perp (SAO).$$

Dựng $AK \perp SO \Rightarrow AK \perp (SBD).$

Suy ra $d(A; (SBD)) = AK.$

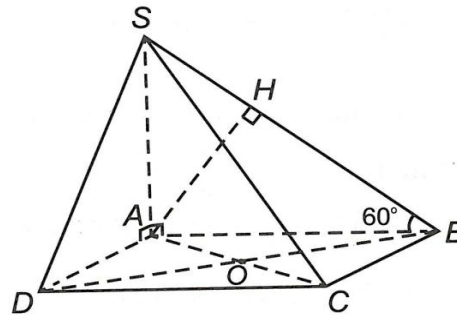
Xét $\triangle SAO$ vuông tại A có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AO^2} \Rightarrow AK = \frac{\sqrt{21}a}{7}.$

Do $O \in (SBD)$ và O là trung điểm AC nên

$$d(C; (SBD)) = d(A; (SBD)) = \frac{\sqrt{21}a}{7}.$$

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $ABCD$ là hình vuông tâm O có cạnh a . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60° . Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) bằng

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$

Suy ra $((SBC); (ABCD)) = SBA.$

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A : $SA = AB \tan SBA = a\sqrt{3}.$

Vì $BC \perp (SAB)$ nên $(SAB) \perp (SBC).$

Dựng $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A; (SBC)) = AH.$

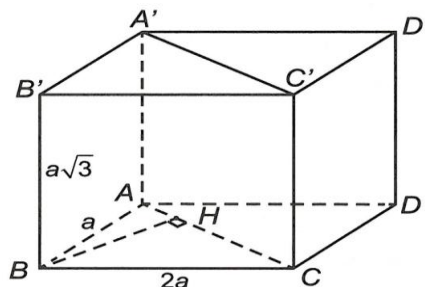
Xét $\triangle SAB$ vuông tại A nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

Do $C \in (SBC)$ và O là trung điểm AC nên $d(O; (SBC)) = \frac{1}{2}d(A; (SBC)) = \frac{\sqrt{3}a}{4}.$

Câu 19. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, BC = 2a, BB' = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng

Lời giải



Kẻ $BH \perp AC (H \in AC).$

Lại có $BH \perp AA' (do AA' \perp (ABCD)).$

Suy ra $BH \perp (ACC'A') \Rightarrow d(B; (ACC'A')) = BH.$

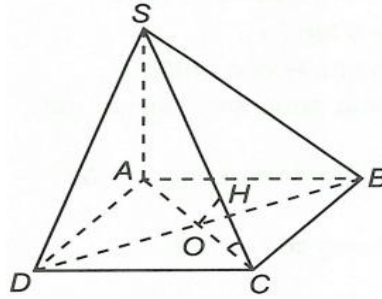
Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có:

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow BH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Vậy } d(B; (ACC'A')) = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a ; cạnh bên SA vuông góc với đáy; SC hợp với đáy góc 45° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD .

Lời giải



Ta có: AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$.

Suy ra $(SC, (ABCD)) = \angle SCA = 45^\circ$.

Lại có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp SC$.

Gọi $\{O\} = AC \cap BD$. Dựng $OH \perp SC$ tại H .

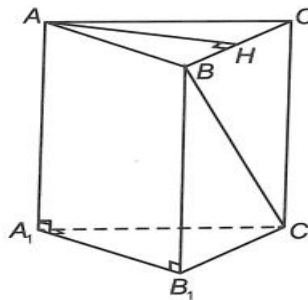
Ta có: $\begin{cases} OH \perp SC \\ OH \perp BD \end{cases}$. Suy ra OH là đoạn vuông góc chung của BD và SC .

Suy ra $d(BD, SC) = OH$.

Xét tam giác OHC vuông tại H có: $OH = OC \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2}$.

Câu 21. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có tam giác ABC vuông cân tại A , $AB = a$, $CC' = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA_1 và BC_1 bằng

Lời giải



Do $BB_1 \parallel AA_1$ nên $AA_1 \parallel (BCC_1B_1)$.

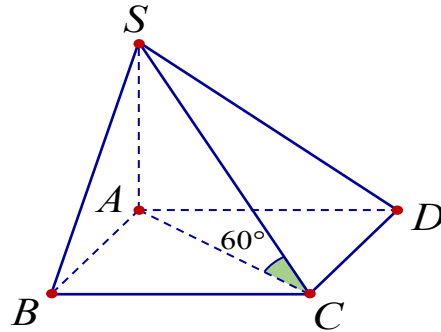
Suy ra $d(AA_1; BC_1) = d(AA_1; (BCC_1B_1)) = d(A; (BCC_1B_1))$.

Do $(BCC_1B_1) \perp (ABC)$, dựng $AH \perp BC$, ($H \in BC$). Suy ra $AH \perp (BCC_1B_1)$.

Xét tam giác ABC vuông tại A : $AH = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy $d(AA_1; BC_1) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 22. Cho hình chóp $SABCD$, $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa SC và $(ABCD)$ là 60° . Tính thể tích khối chóp $SABCD$.

Lời giải



Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$

$$\Rightarrow \angle SCA = 60^\circ.$$

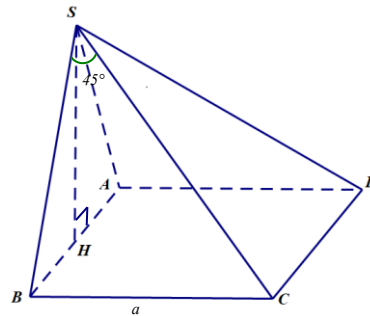
$$ABCD \text{ là hình vuông nên } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a\sqrt{2}.$$

$$SA = AC \cdot \tan 60^\circ = 2a\sqrt{6}$$

$$\text{Thể tích khối chóp } SABCD \text{ là: } V = \frac{1}{3} \cdot 4a^2 \cdot 2a\sqrt{6} = \frac{8}{3}a^3\sqrt{6}.$$

Câu 23. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. SC tạo với (SAB) một góc 45° . Tính thể tích của khối chóp đã cho.

Lời giải



Do $\triangle SAB$ cân tại S và $(SAB) \perp (ABCD)$ nên hình chiếu

vuông góc của S trên $(ABCD)$ là trung điểm H của $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

$$BC \perp AB, BC \perp SH \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (\angle SC, (SAB)) = \angle BSC = 45^\circ \Rightarrow SB = BC = a$$

$$\Rightarrow \triangle SAB \text{ đều cạnh } a \Rightarrow SH = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

$$S_{ABCD} = a^2 \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}.$$

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM:

Câu 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng

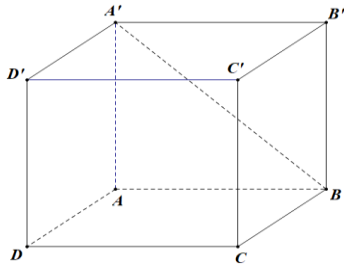
A. 60° .

B. 90° .

C. 45° .

D. 30° .

Lời giải



Ta có $AB \parallel CD$ nên $BA', CD = BA', AB$.

Vì $ABB'A'$ là hình vuông nên $BA', AB = ABA' = 45^\circ$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAD đều. Góc giữa BC và SA là:

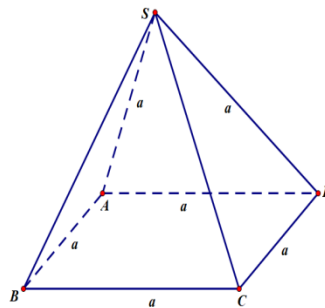
A. 60° .

B. 30° .

C. 90° .

D. 45° .

Lời giải



Vì $BC \parallel AD$ nên $(BC, SA) = (AD, SA) = 60^\circ$

Câu 3. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $a\sqrt{3}$ và cạnh bên bằng a . Góc giữa đường thẳng BB' và AC' bằng

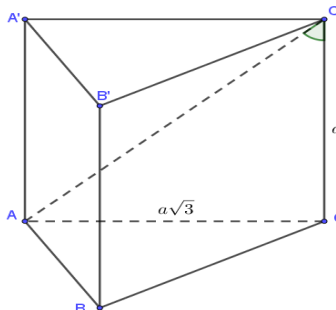
A. 90° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 30° .

Lời giải



Ta có $BB' \parallel CC' \Rightarrow (BB', AC') = (CC', AC') = AC'C$.

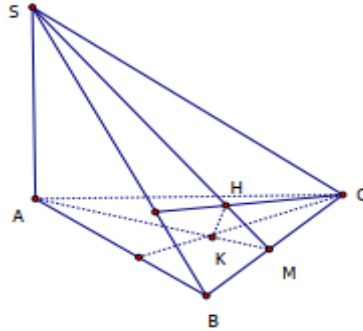
Khi đó $\triangle ACC'$ vuông tại C nên $\tan AC'C = \frac{AC}{CC'} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow AC'C = 60^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng BB' và AC' bằng 60° .

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC . Mệnh đề nào **sai** trong các mệnh đề sau?

- A.** $BC \perp (SAH)$. **B.** $HK \perp (SBC)$.
C. $BC \perp (SAB)$. **D.** SH, AK và BC đồng quy.

Lời giải



Ta có $BC \perp SA, BC \perp SH \Rightarrow BC \perp (SAH)$

Ta có $CK \perp AB, CK \perp SA \Rightarrow CK \perp (SAB) \Rightarrow CK \perp SB$

Mặt khác $CH \perp SB$ nên suy ra $SB \perp (CHK) \Rightarrow SB \perp HK$, tương tự ta chứng minh được $SC \perp HK$ nên $HK \perp (SBC)$.

Gọi M là giao điểm của SH và BC . Do $BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp AM$ hay đường thẳng AM trùng với đường thẳng AK . Hay SH, AK và BC đồng quy.

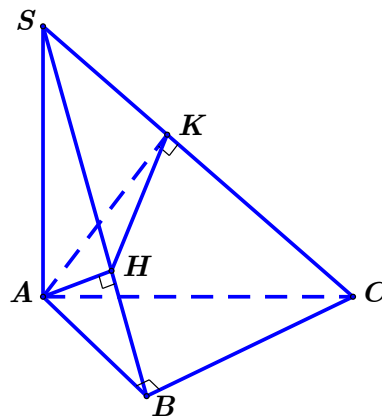
Do đó $BC \perp (SAB)$ sai.

Nhận xét: Ta có thể từ mệnh đề $BC \perp (SAH)$ là đúng suy ra mệnh đề $BC \perp (SAB)$ là sai.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của điểm A trên cạnh SB và SC . Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

- A.** $BC \perp (SAB)$. **B.** $AH \perp (SBC)$. **C.** $AK \perp (SBC)$. **D.** $SC \perp (AHK)$.

Lời giải



$$\left. \begin{array}{l} SA \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow SA \perp BC, AB \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

Suy ra đúng.

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp AH \\ SC \perp AH \end{array} \right\} \Rightarrow AH \perp (SBC). \text{ Suy ra đúng}$$

$$\text{Suy tiếp } \left. \begin{array}{l} AH \perp SC \\ AK \perp SC \end{array} \right\} \Rightarrow SC \perp (AHK). \text{ Suy ra đúng.}$$

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA và SC .

Khẳng định nào dưới đây đúng?

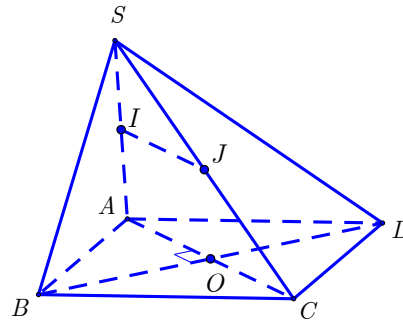
A. $IJ \perp AB$.

B. $IJ \perp AD$.

C. $IJ \perp BD$.

D. $IJ \perp SD$.

Lời giải



Vì IJ là đường trung bình của tam giác SAC nên $IJ \parallel AC$.

$$\text{Ta có } \left\{ \begin{array}{l} IJ \parallel AC \\ BD \perp AC \end{array} \right. \Rightarrow BD \perp IJ.$$

Câu 7. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Gọi M là trung điểm BC .

Khẳng định nào dưới đây đúng?

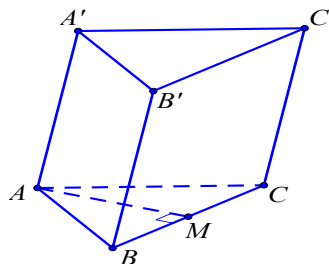
A. $AM \perp A'B'$.

B. $AM \perp BB'$.

C. $AM \perp B'C'$.

D. $AM \perp A'C'$.

Lời giải



Do ABC là tam giác đều nên $AM \perp BC$.

$$\text{Ta có } \left\{ \begin{array}{l} AM \perp BC \\ BC \parallel B'C' \end{array} \right. \Rightarrow AM \perp B'C'.$$

Câu 8. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = \sqrt{3}a$, $AA' = 2\sqrt{3}a$ (tham khảo hình vẽ).

Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

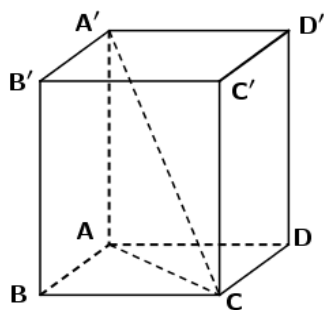
A. 45° .

B. 30° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải



Do $A'A \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của $A'C$ lên mặt phẳng $(ABCD)$

suy ra góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $A'CA$.

$$\text{Có } \tan A'CA = \frac{A'A}{AC} = \frac{A'A}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{a^2 + (\sqrt{3}a)^2}} = \sqrt{3} \Rightarrow A'CA = 60^\circ.$$

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = \sqrt{2}a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 2a$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng

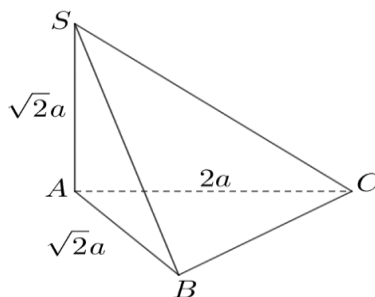
A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải



Ta có: $SB \cap (ABC) = B$; $SA \perp (ABC)$ tại A .

$\Rightarrow$ Hình chiếu vuông góc của SB lên mặt phẳng (ABC) là AB .

$\Rightarrow$ Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) là $\alpha = SBA$.

Do tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 2a$ nên $AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a = SA$.

Suy ra tam giác SAB vuông cân tại A . Do đó: $\alpha = SBA = 45^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 45° .

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

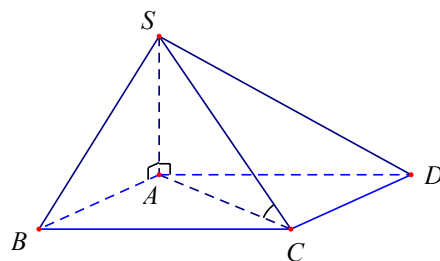
A. 45°

B. 60°

C. 30°

D. 90°

Lời giải



Do $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng góc SCA .

Ta có $SA = \sqrt{2}a$, $AC = \sqrt{2}a \Rightarrow \tan SCA = \frac{SA}{AC} = 1 \Rightarrow SCA = 45^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 45° .

Câu 11. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B có $AC = a\sqrt{3}$, cạnh bên $AA' = 3a$. Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng

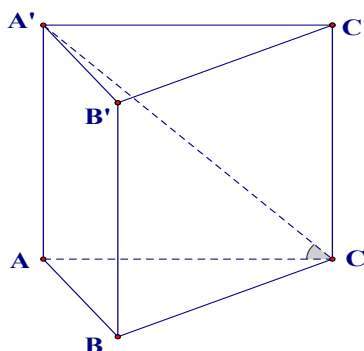
A. 45° .

B. 90° .

C. 60° .

D. 30° .

Lời giải



Ta có hình chiếu của $A'C$ lên mặt phẳng (ABC) là AC .

Nên $(A'C, (ABC)) = (A'C, AC) = A'CA$.

Ta có $\tan A'CA = \frac{A'A}{AC} = \frac{3a}{a\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow A'CA = 60^\circ$. Vậy $(A'C, (ABC)) = 60^\circ$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = AB$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC, SC . Góc giữa EF và mặt phẳng (SAD) bằng.

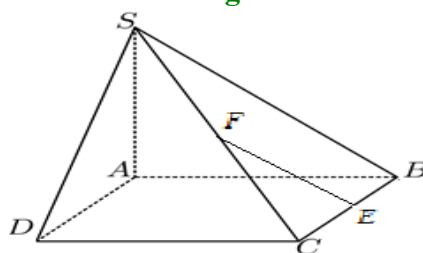
A. 45° .

B. 30° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải



Ta có:

$$\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow (EF, (SAD)) = (BS, (SAD)) = (BS, AS) = BS \wedge A.$$

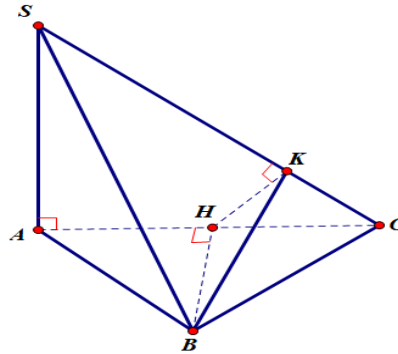
Xét tam giác SAB vuông tại A và có $SA = AB$ suy ra $BS \wedge A = 45^\circ$.

Vậy góc giữa EF và mặt phẳng (SAD) bằng 45° .

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều. $SA \perp (ABC)$, H là trung điểm AC , K là hình chiếu vuông góc của H lên SC . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(SAC) \perp (SAB)$. **B.** $(BKH) \perp (ABC)$. **C.** $(BKH) \perp (SBC)$. **D.** $(SBC) \perp (SAC)$.

Lời giải



Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BH \\ \Delta ABC \text{ đều} \Rightarrow AC \perp BH \end{array} \right\} \Rightarrow HB \perp SC \quad \left. \begin{array}{l} \\ HK \perp SC \end{array} \right\} \Rightarrow SC \perp (BKH) \Rightarrow (SBC) \perp (BKH)$$

Câu 14. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $BC = 2a$ và $AA' = a\sqrt{3}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng

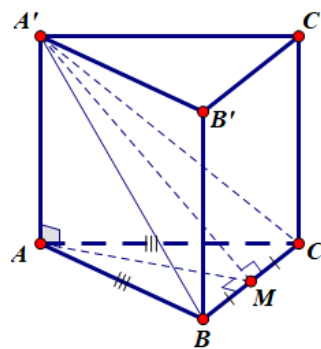
A. 60° .

B. 30° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải



Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AM \perp BC$.

$$\text{Có } \left. \begin{array}{l} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (A'AM) \Rightarrow BC \perp A'M.$$

Do đó $((A'BC), (ABC)) = \angle AMA'$.

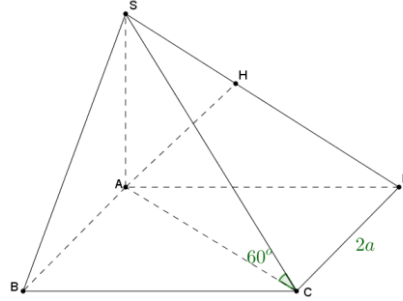
$$\text{Lại có } \Delta ABC \text{ vuông cân tại } A \Rightarrow AM = \frac{BC}{2} = a.$$

Xét $\triangle A'AM$ vuông tại A có $\tan AMA' = \frac{AA'}{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow AMA' = 60^\circ$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA \perp (ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

- A.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên $(SC, (BCD)) = (SC, AC) = \angle SCA = 60^\circ$.

Khi đó $AC = 2a\sqrt{2} \Rightarrow SA = AC \cdot \tan 60^\circ = 2a\sqrt{6}$.

Mà $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD) \Rightarrow d(B, (SCD)) = d(A, (SCD))$.

Kẻ $AH \perp SD \Rightarrow AH \perp (SCD)$

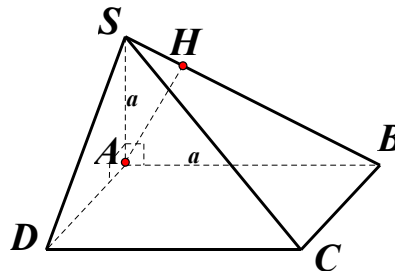
Khi đó $d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AH = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}}$

$\Rightarrow d(B, (SCD)) = \frac{2a\sqrt{6} \cdot 2a}{\sqrt{(2a\sqrt{6})^2 + (2a)^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AD bằng

- A.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Ta có $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel mp(SBC)$

Kẻ $AH \perp SB$ suy ra $AH \perp mp(SBC)$ hay $AH = d(A, mp(SBC))$.

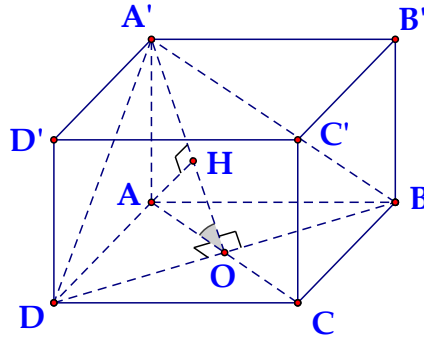
Suy ra $d(AD, SC) = d(AD, mp(SBC)) = d(A, mp(SBC)) = AH$.

Trong tam giác SAB , $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 17. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 30° . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng

- A.** $\frac{2a\sqrt{13}}{13}$. **B.** $\frac{a}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{14}}{7}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD .

Ta có $\begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AOA') \Rightarrow A'O \perp BD$.

Khi đó $((A'BD), (ABCD)) = (A'O, AO) = A'OA = 30^\circ$.

Vẽ $AH \perp A'O$ tại H .

Ta có $BD \perp (AOA') \Rightarrow (A'BD) \perp (AOA')$.

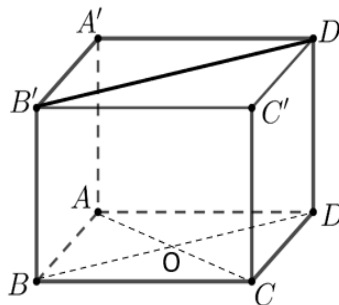
Khi đó $\begin{cases} (AOA') \perp (A'BD) \\ (AOA') \cap (A'BD) = A'O \\ \text{Trong } (AOA'): AH \perp A'O \end{cases} \Rightarrow AH \perp (A'BD) \Rightarrow d(A, (A'BD)) = AH$.

$AC = BD = 2a \Rightarrow AO = a$, $AH = AO \cdot \sin AOA' = a \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2}$. Vậy $d(A, (A'BD)) = \frac{a}{2}$.

Câu 18. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a . Tính khoảng cách giữa AA' và BD'

- A.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có $AO \perp (BDD'B')$ tại O .

$$\Rightarrow d(AA', BD') = d(AA', (BDD'B')) = d(A, (BDD'B')) = AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 19. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $AC = 2a$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

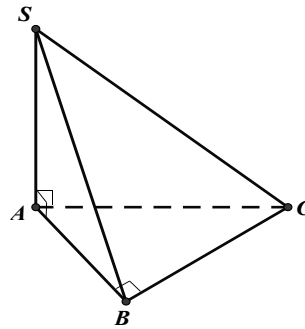
A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{a^3}{3}$.

D. $\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải



Ta có $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot SA = \frac{1}{6} \cdot a \cdot a\sqrt{3} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 20. Thể tích của khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a là

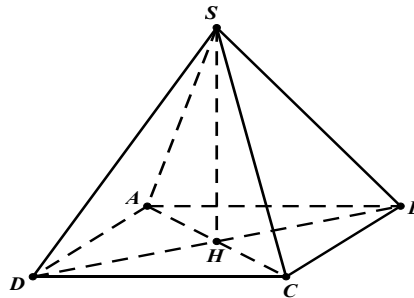
A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

C. a^3 .

D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Giả sử khối chóp tứ giác đều đã cho là $S.ABCD$. Khi đó $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA = SB = SC = SD = a$.

Gọi H là tâm của hình vuông $ABCD$ thì $SH \perp (ABCD)$ nên SH là chiều cao của khối chóp $S.ABCD$. Tính SH :

Xét tam giác ABC vuông tại B ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Nhận thấy $AC^2 = SA^2 + SC^2$ nên tam giác SAC vuông tại S . Suy ra $SH = \frac{AC}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Diện tích đáy của khối chóp $S.ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6}$.

Câu 21. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $AB = a$ và $A'B = a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

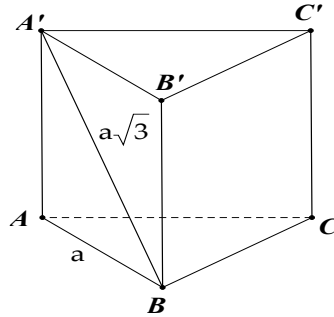
A. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{a^3}{6}$

C. $\frac{a^3}{2}$

D. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{2}$

Lời giải



Ta có $AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$, $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB^2 = \frac{a^2}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ là $V = AA' \cdot S_{ABC} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{2}$.

Câu 22. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $A'B$ tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

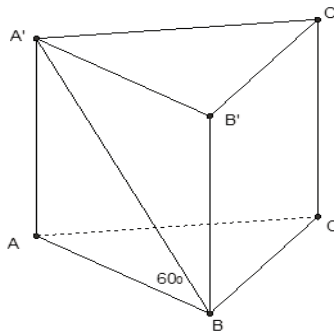
A. $\frac{3a^3}{2}$.

B. $\frac{a^3}{4}$.

C. $\frac{3a^3}{4}$.

D. $\frac{3a^3}{8}$.

Lời giải



Đáy là tam giác đều cạnh a , có diện tích: $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

Vì $AA' \perp ABC \Rightarrow A'BA = A'B$, $\angle ABC = 60^\circ$, suy ra: $AA' = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$

Vậy thể tích khối lăng trụ:

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot AA' = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{4}.$$