

ĐỀ THAM KHẢO KIỂM TRA CUỐI KỲ I – TOÁN 12
NĂM HỌC: 2025-2026

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án. (3 điểm)

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	-3	$+\infty$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty; 1)$.

B. $(4; +\infty)$.

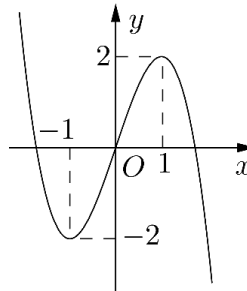
C. $(-1; 3)$.

D. $(-3; +\infty)$.

Lời giải

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$ suy ra hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$.

Câu 2: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây



Điểm cực tiểu của hàm số là

A. $x = -1$.

B. $y = 2$.

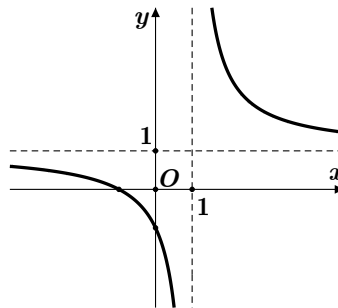
C. $x = 1$.

D. $(-1; -2)$.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số có điểm cực tiểu của hàm số là $x = -1$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là:

A. $x = -1$.

B. $x = 1$.

C. $y = 1$.

D. $y = -1$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 3)$ và $B(-1; 2; 5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

A. $I(-2; 2; 1)$.

B. $I(1; 0; 4)$.

C. $I(2; 0; 8)$.

D. $I(2; -2; -1)$.

Lời giải

Chọn B

Tọa độ trung điểm I của đoạn AB với $A(3;-2;3)$ và $B(-1;2;5)$ được tính bởi

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 1 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 0 \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow I(1;0;4).$$

Câu 5. Hàm số $y = \frac{3x+5}{x+1}$ nghịch biến trên các khoảng nào sau đây?

A. $(-4;2)$.

B. $(-\infty;0)$.

C. $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

D. $(-2;0)$.

Lời giải

+ TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $y' = \frac{-2}{(x+1)^2} < 0 \forall x \in D$.

Suy ra hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vector $\vec{a}$ là

A. $(2;-1;-3)$.

B. $(-3;2;-1)$.

C. $(2;-3;-1)$.

D. $(-1;2;-3)$.

Câu 7. Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị: km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau:

Quãng đường (km)	$[2, 7; 3, 0)$	$[3, 0; 3, 3)$	$[3, 3; 3, 6)$	$[3, 6; 3, 9)$	$[3, 9; 4, 2)$
Số ngày	3	6	5	4	2

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

A. 3,39.

B. 0,1314.

C. 11,62.

D. 0,36.

Lời giải

Số trung bình: $\bar{x} = \frac{3.2,85 + 6.3,15 + 5.3,45 + 4.3,75 + 2.4,05}{20} = 3,39$

Phương sai: $S^2 = \frac{3.2,85^2 + 6.3,15^2 + 5.3,45^2 + 4.3,75^2 + 2.4,05^2}{20} - 3,39^2 = 0,1314$

Chọn đáp án B.

Câu 8. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình dưới đây?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'		-	-
y	2		2

A. $y = \frac{2x-7}{x-2}$.

B. $y = \frac{2x+1}{x+2}$.

C. $y = \frac{2x+1}{x-2}$.

D. $y = \frac{1-2x}{x-2}$.

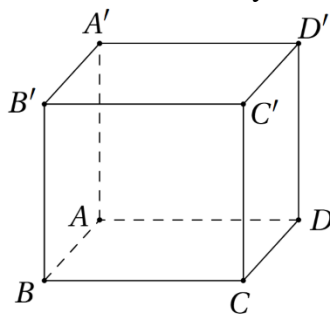
Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$ nên ta loại B.

Dựa vào bảng biến thiên, đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$ nên ta loại D.

Xét đáp án A có $y' = \frac{3}{(x-2)^2} > 0$ nên loại đáp án A.

Câu 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?



A. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

B. $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}$.

C. $\overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD'}$.

D. $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BB'}$

Lời giải

Theo quy tắc hình bình hành, ta có $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}$.

Câu 10. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ trên đoạn $[2;5]$ là

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{5}{4}$

C. 2.

D. 5.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u} = (3; -2; 1)$ và $\vec{v} = (1; -1; 2)$. Tọa độ $\vec{u} - \vec{v}$ là

A. $(4; -3; 3)$.

B. $(2; -1; -1)$

C. $(2; -3; -1)$.

D. $(-2; 1; 1)$.

Câu 12: Một shipper thống kê lại số lượng bưu phẩm mà người này giao đến cho khách hàng mỗi ngày trong ngày như sau:

Số bưu phẩm	$[10;14)$	$[14;18)$	$[18;22)$	$[22;26)$	$[26;30)$
Số ngày	3	6	7	12	19

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. 25.

B. 27.

C. 30.

D. 20.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai (2 điểm)

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $M(-4; 3; -1)$ và $N(2; -1; -3)$.

a) Tọa độ của vector $\overrightarrow{OM} = (-4; 3; -1)$.

b) Cho vector $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ và $\overrightarrow{AM} = \vec{v}$. Tọa độ của điểm A là $A(5; 1; 2)$.

c) Gọi G là trọng tâm của $\triangle OMN$. Tọa độ hình chiếu của G lên mp(Oxy) là $\left(0; 0; -\frac{4}{3}\right)$.

d) I là trung điểm của đoạn MN. Tọa độ của vector $\vec{w} = 3\vec{i} + 2\overrightarrow{ON} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OI}$ là $\vec{w}\left(\frac{9}{2}; \frac{-5}{2}; -7\right)$.

Lời giải

a) **Đúng**

Tọa độ của vector $\overrightarrow{OM}$ là tọa độ của điểm $M(-4; 3; -1)$.

b) **Sai**

Ta có: $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ nên $\vec{v} = (1; 2; -3)$, giả sử tọa độ của điểm $A(x_A; y_A; z_A)$.

$$\text{Theo giả thiết } \overrightarrow{AM} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 - x_A = 1 \\ 3 - y_A = 2 \\ -1 - z_A = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -5 \\ y_A = 1 \\ z_A = 2 \end{cases} \Leftrightarrow A(-5; 1; 2).$$

c) Sai

Ta có: $G\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. Tọa độ hình chiếu của G lên mp(Oxy) là $\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; 0\right)$.

d) Sai

I là trung điểm của MN nên tọa độ I xác định bởi công thức

$$\begin{cases} \frac{x_M + x_N}{2} = x_I \\ \frac{y_M + y_N}{2} = y_I \\ \frac{z_M + z_N}{2} = z_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-4 + 2}{2} = x_I \\ \frac{3 - 1}{2} = y_I \\ \frac{-1 - 3}{2} = z_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = x_I \\ 1 = y_I \\ -2 = z_I \end{cases} \Leftrightarrow I(-1; 1; -2)$$

$$\text{Theo giả thiết } \vec{w} = 3\vec{i} + 2\overrightarrow{ON} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OI} = \left(3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot (-1); 2 \cdot (-1) - \frac{1}{2} \cdot 1; 2 \cdot (-3) - \frac{1}{2} \cdot (-2)\right)$$

$$\Rightarrow \vec{w} = \left(\frac{15}{2}; -\frac{5}{2}; -5\right).$$

Câu 2. Hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	1	$-\infty$	$+\infty$	5	$+\infty$

a) Hàm số có 2 điểm cực trị.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

c) Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng và 1 đường tiệm cận xiên.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ bằng -3 .

Lời giải

a) **Đúng**

Dựa vào BBT, ta thấy hàm số có 2 cực trị.

b) **Đúng**

c) **Đúng**

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2^-} y = -\infty$$

$$\Rightarrow \text{TCĐ: } x = 2$$

$$\text{Ta có } a = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y : x) = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - 1 \cdot x) = 1$$

$$\Rightarrow \text{TCX: } y = x + 1$$

$$\text{Ta có } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y : x) = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - 1 \cdot x) = 1$$

$$\Rightarrow \text{TCX: } y = x + 1$$

Vậy đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng $x = 2$ và 1 đường tiệm cận xiên $y = x + 1$.

d) Sai

Dựa vào BBT, ta thấy $\max_{\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]} y = h(1) = 1$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn . Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. (2 điểm)

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y = \frac{mx - 3}{2x - m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

Lời giải

TL: 11

$$\text{Ta có: } y = \frac{mx - 3}{2x - m} \Rightarrow y' = \frac{-m^2 + 6}{(2x - m)^2}$$

$$\text{Theo yêu cầu bài toán: } y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow -m^2 + 6 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{6} < m < \sqrt{6}.$$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-5; -4; \dots; 4, 5\}$ suy ra có 11 giá trị thỏa mãn

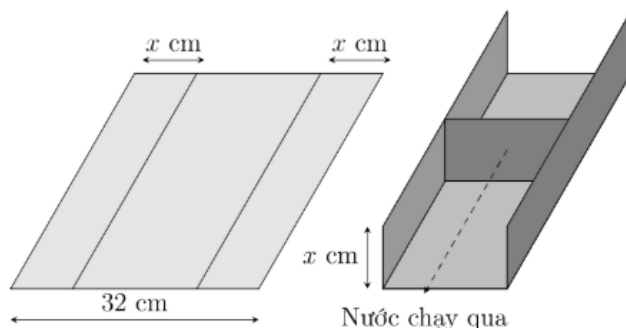
Câu 2. Một công ty cung cấp nước sạch thống kê lượng nước sạch mỗi hộ gia đình ở một khu vực sử dụng trong tháng 01/2023 ở bảng sau (đơn vị: m^3).

Lượng nước (m^3)	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)
Số hộ gia đình	23	50	35	25	7

Tính tỉ số giữa số trung bình và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

TL: 4,15

Câu 3. Một miếng nhôm có bề ngang 32 cm được uốn cong tạo thành rãnh nước bằng cách chia tấm nhôm thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông như hình bên dưới. Hỏi số đo x cm bằng bao nhiêu để tạo ra máng có diện tích mặt ngang lớn nhất để có thể cho nước đi qua nhiều nhất?



Lời giải

Đáp án: 8

Mặt ngang của máng là hình chữ nhật có độ dài lần lượt là x và $32 - 2x$ ($0 < x < 32$).

$$\text{Diện tích mặt ngang } x(32 - 2x) = 32x - 2x^2 = -2(x - 8)^2 + 128 \leq 128.$$

Nên có diện tích mặt ngang lớn nhất khi $x = 8$.

Câu 4. Trong một căn phòng dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài $8m$, rộng $6m$ và cao $4m$ có 2 cây quạt treo tường. Cây quạt A treo chính giữa bức tường $8m$ và cách trần $1m$, cây quạt B treo chính giữa bức tường $6m$ và cách trần $1,5m$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ bên dưới (đơn vị: mét).



Biết điểm $M(x; y; z)$ thuộc mặt phẳng chứa sàn nhà sao cho $|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}|$ là nhỏ nhất, khi đó $x - y + z$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: -10



Từ hình vẽ: $A \in (Oxz)$ nên $A(x; 0; z)$; $B \in (Oyz)$ nên $B(0; y; z)$

Cây quạt A treo chính giữa bức tường $8m$ và cách trần $1m$ nên $A(4; 0; 3)$.

Cây quạt B treo chính giữa bức tường $6m$ và cách trần $1,5m$ nên $B(0; 3; \frac{5}{2})$.

$$\text{Gọi } I(a; b; c) \text{ là điểm sao cho } \overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - a - 2(0 - a) = 0 \\ 0 - b - 2(3 - b) = 0 \\ 3 - c - 2(\frac{5}{2} - c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 6 \\ c = 2 \end{cases}$$

Suy ra $I(-4; 6; 2)$, khi đó $|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})| = |-\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB}| = MI$

$|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}|$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất, mà $M \in (Oxy)$ nên M là hình chiếu của I lên (Oxy) .

$$\Rightarrow M(-4; 6; 0) \Rightarrow x - y + z = -10.$$

Phần IV. Tự luận (3 điểm)

Câu 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$

Lời giải

Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Sự biến thiên: $y' = -\frac{3}{(x-2)^2} < 0$ với mọi $x \neq 2$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Tiệm cận:

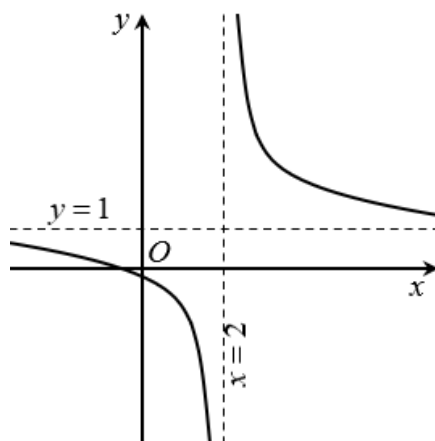
$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1.$$

Do đó, đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	1	$+\infty$	1

Đồ thị



Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là điểm $(-1; 0)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2; 1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng.

Câu 2. Một doanh nghiệp dự định sản xuất 200 máy tính bảng dành cho học sinh. Nếu doanh nghiệp đó bán x máy tính bảng $(1 \leq x \leq 200, x \in \mathbb{N})$ thì giá bán cho mỗi máy tính bảng là $p(x) = 4000 - 10x$ (nghìn đồng), trong đó chi phí để sản xuất mỗi máy tính bảng là $c(x) = x^2 - 70x + 400 + \frac{1000}{x}$ (nghìn đồng). Hỏi doanh nghiệp đó sẽ bán bao nhiêu máy tính bảng để lợi nhuận cao nhất?

Lời giải

Tổng doanh thu của doanh nghiệp khi bán x máy tính bảng là:

$$R(x) = x \cdot p(x) = x(4000 - 10x) = -10x^2 + 4000x.$$

Tổng chi phí của doanh nghiệp khi bán x máy tính bảng là:

$$C(x) = x \cdot c(x) = x \left(x^2 - 70x + 400 + \frac{1000}{x} \right) = x^3 - 70x^2 + 400x + 1000.$$

Lợi nhuận mà doanh nghiệp có được là:

$$L(x) = R(x) - C(x) = -10x^2 + 4000x - (x^3 - 70x^2 + 400x + 1000) = -x^3 + 60x^2 + 3600x - 1000.$$

Xét hàm số $L(x) = -x^3 + 60x^2 + 3600x - 1000, (1 \leq x \leq 200, x \in \mathbb{N})$.

$$\text{Ta có } L'(x) = -3x^2 + 120x + 3600 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60(TM) \\ x = -20(L) \end{cases}$$

$$L(1) = 2659, L(60) = 215000, L(200) = -4881000$$

Ta thấy giá trị lớn nhất của $L(x)$ bằng 215000 đạt được tại $x = 60$.

Vậy để lợi nhuận cao nhất thì doanh nghiệp đó cần bán được 60 máy tính bảng.

Câu 3: Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm trong không gian. Sau một khoảng thời gian, chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 3 km về phía Đông và 2 km về phía Nam, đồng thời cách mặt đất 0,5 km; chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía Bắc và 1 km về phía Tây, đồng thời cách mặt đất 0,3 km. Cùng thời điểm đó, một người đứng trên mặt đất và nhìn thấy hai khinh khí cầu nói trên. Biết rằng, so với các vị trí quan sát khác trên mặt đất, vị trí người đó đứng có tổng khoảng cách đến hai khinh khí cầu là nhỏ nhất. Hỏi tổng khoảng cách nhỏ nhất ấy bằng bao nhiêu kilômét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông và trục Oz hướng thẳng lên trời (đơn vị đo lấy theo kilômét).

Khi đó $O(0;0;0)$, $A(2;3;0,5)$, $B(-1;-1;0,3)$ lần lượt là vị trí xuất phát và vị trí của hai khinh khí cầu đối với hệ tọa độ đã chọn tại thời điểm được quan sát.

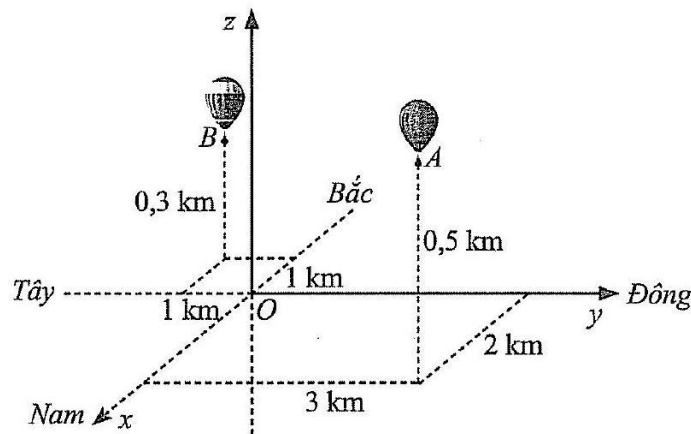
Gọi M là vị trí đứng của người quan sát.

Gọi $B'(-1;-1;-0,3)$ là điểm đối xứng với B qua mặt phẳng (Oxy) .

Ta có $MA + MB = MA + MB'$.

Suy ra $MA + MB$ nhỏ nhất khi $MA + MB'$ nhỏ nhất, nghĩa là khi và chỉ khi A, B', M thẳng hàng.

Gọi $M(x_M; y_M; 0)$, suy ra



Hình 7

$$\overrightarrow{MA} = (2 - x_M; 3 - y_M; 0,5), \overrightarrow{MB'} = (-1 - x_M; -1 - y_M; -0,3).$$

A, B', M thẳng hàng nên $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB'}$ cùng phương

$$\Rightarrow \frac{-1 - x_M}{2 - x_M} = \frac{-1 - y_M}{3 - y_M} = \frac{-0,3}{0,5} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{1}{8} \\ y_M = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{2}; 0\right).$$

Khi đó $\min(MA + MB) = \min(MA + MB') = AB' \approx 5,1 \text{ km}$.

Kết quả: 5,1 km

